



**Elsa Cristina
Anjos dos Santos**

**Estabilidade em Esquemas de Controlo com
Comutação**



**Elsa Cristina
Anjos dos Santos**

**Estabilidade em Esquemas de Controlo com
Comutação**

dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica da Doutora Maria Paula Macedo Rocha Malonek, Professora Catedrática do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Dedico este trabalho à minha avó Augusta.

o júri

presidente

Vasile Staicu
professor catedrático da Universidade de Aveiro

Maria Paula Macedo Rocha Malonek
professora catedrática da Universidade de Aveiro (Orientadora)

Maria Teresa Mendonça
professora auxiliar da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Paula Rocha Malonek, pela eficiente e indispensável orientação durante a realização deste trabalho. Pelo seu apoio e disponibilidade permanente e por me haver convencido que eu conseguiria levar a termo este trabalho.

À Universidade de Aveiro pela bolsa concedida no primeiro ano de Mestrado.

Aos meus colegas de Mestrado.

Aos meus pais e restante família, distantes mas constantes.

Ao meu namorado José Luís pelo seu apoio e incentivo constante.

Aos meus amigos e a todos os que não foram referidos e que de alguma forma contribuíram para a concretização deste trabalho.

palavras-chave

sistemas comutados, estabilidade, controlo.

resumo

Neste trabalho são estabelecidas condições que garantem que um sistema comutado é estável. Tais condições são posteriormente usadas no estudo da estabilidade de esquemas de controlo comutado com base num banco de controladores estabilizantes. Mais concretamente, apresenta-se um processo de escolha de realizações de espaço de estados para os controladores do banco que garantem a estabilidade do esquema de comutação.

keywords

switched systems, stability, control.

abstract

In this work conditions which ensure the stability of a switched system are established. These conditions are used in the study of the stability of switched control systems based in a stabilizing controller bank. More precisely a process of choice of state space realizations for the controllers of the bank is presented, which ensures the stability of the switched control scheme.

Índice

Índice	i
Notação	iii
1 Introdução	1
2 Breve Introdução aos Sistemas Lineares	3
2.1 Introdução	3
2.2 Estabilidade	5
2.3 Controlabilidade e Observabilidade	9
2.4 Estabilizabilidade e Detectabilidade	10
2.5 Função de Transferência	12
2.6 Factorização de Funções de Transferência Racionais	14
3 Estabilidade de Sistemas Comutados	17
3.1 Introdução	17
3.2 Critério de Lyapunov	20
3.3 Existência de FLQC	23
3.3.1 Sistemas com Matrizes que Comutam aos Pares	23
3.3.2 Sistemas com Matrizes Simultaneamente Triangularizáveis	24
3.4 Síntese	31

4	Controlo Comutado	33
4.1	Introdução	33
4.2	Estabilidade do Esquema de Controlo Comutado	35
4.3	Algoritmo	47
5	Conclusão	51
A	Apêndice	53
	Referências	57

Notação

$\|\cdot\|$ - Norma Euclidiana em \mathbb{R}^n

A^T - Matriz transposta de A

A^* - Matriz transposta conjugada de A

$|M|$ - Determinante da matriz M

$\Re(\lambda)$ - Parte real de λ

$\Im(\lambda)$ - Parte imaginária de λ

\mathbb{C}^- - Conjunto dos números $z \in \mathbb{C}$ tais que $\Re(z) < 0$

\mathbb{C}^+ - Conjunto dos números $z \in \mathbb{C}$ tais que $\Re(z) > 0$

\mathcal{P} - Conjunto de índices

σ - Sinal de comutação

\mathbf{P} - Processo

$H_{\mathbf{P}}$ - Função de transferência do processo

\mathcal{K} - Banco de Controladores

K_p - Função de transferência do controlador p

u - Controle do processo

y - Saída do processo

r - Sinal de referência

d - Perturbação

n - Ruído de medição

e_T - Entrada do controlador

u_C - Saída do controlador

Capítulo 1

Introdução

Na maioria das situações práticas, os processos que se pretende controlar não são conhecidos com exactidão (isto é, possuem um certo grau de incerteza), o que coloca problemas na construção de controladores adequados.

Uma das abordagens recentemente desenvolvidas para o controlo de processos com incertezas é a utilização de esquemas de controlo com comutação. Tais esquemas têm por base um banco de controladores \mathcal{K} e um critério que, em cada instante, permite seleccionar o controlador mais adequado. Assim, o processo \mathbf{P} a controlar não é compensado por um controlador fixo, mas por um controlador variável no tempo, comutando entre os elementos do banco \mathcal{K} .

Embora intuitivamente seja de esperar que a comutação entre controladores conduza a melhores resultados que a utilização de um controlador fixo, tal pode efectivamente não acontecer. Por exemplo, mesmo que todos os controladores do banco \mathcal{K} estabilizem o processo \mathbf{P} , a comutação entre aqueles controladores pode originar um sistema em malha fechada que não é estável.

Este trabalho consiste no estudo da estabilidade de um sistema de controlo comutado, isto é, pretende-se estabelecer condições que garantam que um sistema de controlo comutado é estável. Para esse efeito, começa-se no Capítulo 2 por apresentar alguns resultados e conceitos de teoria de sistemas lineares, indispensáveis para o estudo a

levar a cabo.

No Capítulo 3 é estudada a estabilidade de sistemas lineares comutados, sendo considerado o caso da comutação entre sistemas lineares estáveis. São estabelecidos critérios de estabilidade de sistemas comutados com base na existência de uma função de Lyapunov quadrática comum (FLQC), assim como condições para as quais uma FLQC existe.

No Capítulo 4 estuda-se a estabilidade de um sistema controlado através de um esquema de controlo comutado, com base num banco de controladores estabilizantes. A estabilidade do sistema comutado é garantida através da escolha de realizações adequadas para os controladores do banco. Apresenta-se um algoritmo para a obtenção de um sistema de controlo comutado estável, baseado nos resultados estabelecidos neste capítulo.

Em Apêndice, são apresentadas as demonstrações de dois dos resultados usados neste trabalho.

Capítulo 2

Breve Introdução aos Sistemas Lineares

2.1 Introdução

Este capítulo contém uma síntese dos principais resultados da teoria de sistemas lineares que serão necessários nos capítulos que se seguem. Omite-se a maioria das demonstrações, uma vez que os resultados apresentados são essencialmente auxiliares, não constituindo o tema da presente dissertação.

Neste trabalho consideram-se *sistemas lineares* representados por equações lineares da forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

onde \dot{x} é a derivada de x , $t \in \mathbb{R}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o *vector de estado* e as suas componentes $x_1(t), \dots, x_n(t)$ as *variáveis de estado*, \mathbb{R}^n é o *espaço de estados*, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o *senal de entrada* e $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é o *senal de saída*. Considera-se como admissíveis os sinais de entrada na classe de funções contínuas aos pedaços. As matrizes $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ e $D(t)$ são matrizes de dimensões $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ e $p \times m$ respectivamente, cujas entradas são funções reais contínuas definidas para todo o $t \in \mathbb{R}$. O sistema

linear (2.1) é frequentemente representado abreviadamente por $(A(t), B(t), C(t), D(t))$.

Diz-se que o sistema linear (2.1) é **invariante no tempo** se os coeficientes das matrizes são constantes, caso contrário diz-se que o sistema é **variante no tempo**.

Deste modo, no caso invariante, considerando $A = A(t)$, $B = B(t)$, $C = C(t)$ e $D = D(t)$, tem-se que a equação linear de estado (2.1) toma a forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

Daqui em diante chamar-se-á sistema linear variante no tempo (SLVT) a um sistema da forma (2.1) e sistema linear invariante no tempo (SLIT) a um sistema da forma (2.2).

Considere-se a entrada $u(t) = 0$, para todo o $t \in \mathbb{R}$, tomando-se apenas a equação linear de estado

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), x(t_0) = x_0, \quad (2.3)$$

onde o tempo inicial t_0 e o estado inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ são dados.

Definição 2.1.1. Diz-se que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é **solução** do sistema linear (2.3) se e só se $x(t)$ é continuamente diferenciável e satisfaz (2.3) para todo o $t \geq t_0$.

O resultado que se segue garante a existência e unicidade de solução da equação linear de estado (2.3).

Teorema 2.1.2. [Rug93, pág. 42] Para cada condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a equação linear de estado (2.3), com $A(t)$ contínua, admite uma única solução

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0,$$

contínua e diferenciável, em que $\Phi(t, t_0)$ é uma matriz quadrada de ordem n , denominada de **matriz de transição**.

No caso da equação linear de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t), x(t_0) = x_0, \quad (2.4)$$

a solução desta equação é dada por $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$, onde $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k (t - t_0)^k$. Quando $t_0 = 0$ tem-se $\Phi(t, 0) = e^{At}$.

Quando a entrada u não é nula, verifica-se que

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

o que implica que a saída y seja dada por

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t). \quad (2.5)$$

2.2 Estabilidade

Nesta secção apresentam-se critérios de estabilidade para SLVT e SLIT.

Definição 2.2.1. *O sistema correspondente à equação linear de estado (2.3) diz-se **uniformemente exponencialmente estável** se existirem constantes positivas finitas γ, λ tais que para quaisquer $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a solução de (2.3) satisfaz*

$$\|x(t)\| \leq \gamma e^{-\lambda(t-t_0)} \|x_0\|, t \geq t_0$$

(aqui $\|\cdot\|$ denota a norma Euclideana em \mathbb{R}^n).

Daqui em diante, utiliza-se apenas o termo estabilidade para referir a estabilidade exponencial uniforme.

Uma vez que os sistemas invariantes constituem um caso particular dos sistemas variantes no tempo, a definição de estabilidade para aqueles sistemas é análoga à destes últimos. Começa-se por apresentar resultados sobre o caso invariante, que é naturalmente mais simples.

A estabilidade do sistema (2.4) pode ser caracterizada em termos dos valores próprios da matriz A , de acordo com o seguinte resultado.

Teorema 2.2.2. [Rug93, pág. 90] *A equação linear de estado (2.4) é estável se e só se $\Re(\lambda) < 0$, para todo o valor próprio λ de A .*

Assim, matrizes com valores próprios em $\mathbb{C}^- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) < 0\}$, são também designadas por matrizes estáveis.

Note-se que uma vez que as transformações de semelhança SAS^{-1} não alteram os valores próprios de A , tendo em conta o teorema anterior, tais transformações também não alteram a estabilidade do sistema.

A estabilidade de sistemas invariantes no tempo pode também ser estudada em termos de funções de Lyapunov. Começa-se por recordar a definição de função de Lyapunov para um sistema do tipo $\dot{x}(t) = f(x(t))$.

Definição 2.2.3. A função $V(x)$ diz-se uma **função de Lyapunov** para um sistema $\dot{x}(t) = f(x(t))$ quando verifica as seguintes condições:

1. $V(x) > 0, \forall x \neq 0, V(0) = 0$;
2. $V(x)$ é de classe C^1 ;
3. $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$;
4. $\nabla V(x)f(x) < 0, x \neq 0$.

Se além disso $V(x)$ for uma função quadrática, isto é, se $V(x)$ for do tipo $V(x) = x^T Px$, onde P é uma matriz simétrica, diz-se que se trata de uma **função de Lyapunov quadrática** (FLQ).

A proposição que se segue fornece condições para que uma função quadrática seja uma função de Lyapunov para um sistema linear.

Proposição 2.2.4. A função quadrática $V(x) = x^T Px$, onde P é simétrica, é uma função de Lyapunov para o sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$, se e só se P for definida positiva e tal que $A^T P + PA < 0$.

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha-se que a função quadrática $V(x) = x^T Px$ é uma função de Lyapunov para o sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$.

Claramente a condição 1. da Definição 2.2.3 implica que P seja definida positiva.

Atendendo à condição 4. da mesma Definição tem-se que, para as trajectórias $x(t)$

de (2.4):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V(x(t))) < 0 &\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(x^T(t)Px(t)) < 0 \\ &\Leftrightarrow x^T(t)(A^TP + PA + \dot{P})x(t) < 0. \end{aligned}$$

Como $\dot{P} = 0$ e $x(t)$ pode assumir todos os valores em \mathbb{R}^n (pelo Teorema 2.1.2) tem-se que

$$A^TP + PA < 0.$$

(\Leftarrow) Considere-se a função quadrática $V(x) = x^TPx$. Suponha-se que P é definida positiva e tal que $A^TP + PA < 0$.

Pretende-se mostrar que $V(x) = x^TPx$ é uma função de Lyapunov, i.e., pretende-se mostrar que a função $V(x) = x^TPx$ verifica as condições da Definição 2.2.3 .

Assim,

1. Uma vez que P é definida positiva, então $V(x) = x^TPx > 0$, $\forall x \neq 0$. Além disso, é óbvio que $V(0) = 0^TP0 = 0$.
2. $V(x) = x^TPx$ é de classe C^1 , uma vez que se trata de uma função polinomial de várias variáveis (componentes de x).
3. Seja U uma matriz ortogonal que diagonaliza P , i.e., tal que $P = U^TDU$ (a existência de tal matriz é garantida pelo facto de P ser simétrica, [LR85, pág. 306]), então

$$\begin{aligned} \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) &= \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} x^TPx \\ &= \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} (Ux)^TD(Ux) \\ &= \lim_{\|Ux\| \rightarrow \infty} (Ux)^TD(Ux). \end{aligned}$$

Fazendo $y = Ux$ e designando por λ_{min} o menor dos valores próprios de P , tem-se

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \lim_{\|y\| \rightarrow \infty} y^TDy \geq \lambda_{min} \|y\|^2.$$

Uma vez que, $\lambda_{min} \|y\|^2 \rightarrow +\infty$, conclui-se que também

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty.$$

4.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x(t)) &= \frac{d}{dt}\left(x^T(t)Px(t)\right) \\
&= x^T(t)\left(A^TP + PA + \dot{P}\right)x(t) \\
&= x^T(t)\left(A^TP + PA\right)x(t) < 0,
\end{aligned}$$

pois $\dot{P} = 0$ e por hipótese $A^TP + PA < 0$. Como, por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x(t)) &= \nabla V(x(t))\dot{x}(t) \\
&= \nabla V(x(t))f(x(t))
\end{aligned}$$

e $x(t)$ pode assumir todos os valores em \mathbb{R}^n , verifica-se que $\nabla V(x)f(x) < 0$.

Logo, $V(x) = x^TPx$ é uma função de Lyapunov. □

A relação entre a existência de uma FLQ e os valores próprios de A é estabelecida pelo seguinte resultado.

Teorema 2.2.5. *[Rug93, pág. 107] A matriz A , $n \times n$, tem valores próprios com parte real negativa, se e só se, se verifica a seguinte condição: para cada matriz simétrica, definida positiva Q , $n \times n$, existe uma única solução de*

$$A^TP + PA = -Q,$$

além disso tal solução é simétrica e definida positiva.

Note-se, que pelo Teorema 2.2.2, a condição do Teorema 2.2.5 é equivalente à estabilidade do sistema (2.4).

Relativamente ao caso variante no tempo não é possível dar uma caracterização da estabilidade em termos de valores próprios. No entanto, a abordagem de Lyapunov pode ser generalizada dando origem ao teorema que se segue.

Teorema 2.2.6. *[Rug93, pág. 101] Considere-se o sistema descrito pela equação linear de estado (2.3). O sistema é estável se existir uma função matricial continuamente*

diferenciável $P(t)$, definida para $t \geq t_0$, com $P(t)$, $n \times n$, simétrica e definida positiva, para todo $t \geq t_0$, tal que

$$\eta I \leq P(t) \leq \rho I$$

e

$$A(t)^T P(t) + P(t) A(t) + \dot{P}(t) \leq -\nu I,$$

onde η , ρ e ν são constantes finitas positivas, e a notação $X \leq Y$ aplicada a duas matrizes X e Y significa que a diferença $Y - X$ é semi-definida positiva.

2.3 Controlabilidade e Observabilidade

Considere-se o sistema linear invariante no tempo definido pela equação linear de estado

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (2.6)$$

com $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ e $t \geq t_0$.

Definição 2.3.1. O sistema descrito pela equação linear de estado (2.6) diz-se **controlável** em $[t_0, t_f]$ se para qualquer condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe um sinal de entrada admissível u definido em $[t_0, t_f]$, tal que a correspondente solução de (2.6) satisfaz $x(t_f) = 0$. Neste caso, também se diz que o par (A, B) é controlável em $[t_0, t_f]$.

Pode-se fazer a caracterização da controlabilidade, através do seguinte resultado:

Teorema 2.3.2. [Rug93, págs. 128 e 197] O par (A, B) é controlável em $[t_0, t_f]$ se e só se verifica uma das seguintes condições equivalentes:

$$\begin{aligned} (i) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} &= n. \\ (ii) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \end{bmatrix} &= n, \forall \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Definição 2.3.3. O sistema descrito pela equação linear de estado (2.6) diz-se **observável** em $[t_0, t_f]$ se qualquer estado inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ for unicamente determinado pela correspondente resposta $y(t)$, para $t \in [t_0, t_f]$. Neste caso, também se diz que o par (C, A) é observável em $[t_0, t_f]$.

Analogamente ao que acontece para a controlabilidade, pode-se fazer a caracterização da observabilidade, através do seguinte resultado.

Teorema 2.3.4. *[Rug93, págs. 131 e 208] O par (A, C) é observável em $[t_0, t_f]$ se e só se verifica uma das seguintes condições equivalentes:*

$$\begin{aligned} (i) \text{ rank } \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} &= n. \\ (ii) \text{ rank } \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} &= n, \forall \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

2.4 Estabilizabilidade e Detectabilidade

Considere-se o sistema linear invariante no tempo definido pela equação linear de estado (2.6), i.e.,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases}$$

Aplicando uma lei de controlo por realimentação do estado

$$u(t) = Lx(t),$$

a dinâmica do sistema controlado, sistema em malha fechada, é dada por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BL)x(t) \\ y(t) = (C + DL)x(t). \end{cases} \quad (2.7)$$

Por outro lado, fazendo a injeção da saída (ponderada por uma matriz M) obtém-se uma nova dinâmica da forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + MC)x(t) + (B + MD)u(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases} \quad (2.8)$$

Definição 2.4.1. *O sistema descrito pela equação linear de estado (2.6) diz-se **estabilizável** se existir uma lei de realimentação do estado L tal que o sistema em malha fechada (2.7) é estável, isto é, a matriz*

$$A + BL$$

é estável. Neste caso, também se diz que o par (A, B) é estabilizável.

O resultado que se segue dá uma caracterização desta propriedade.

Teorema 2.4.2. *[Rug93, pág. 233] O par (A, B) é estabilizável se e só se,*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \end{bmatrix} = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) \geq 0\}.$$

Assim, do Teorema anterior e atendendo ao ponto (ii) do Teorema 2.3.2, obtém-se que:

Corolário 2.4.3. *O par (A, B) é estabilizável se for controlável.*

Definição 2.4.4. *O sistema descrito pela equação linear de estado (2.6) diz-se **detectável** se existir uma matriz M tal que a correspondente injeção de saída, torna o sistema estável, isto é, se a matriz*

$$A + MC$$

do sistema (2.8) é estável. Neste caso, também se diz que o par (C, A) é detectável.

Pode caracterizar-se a detectabilidade, através do seguinte resultado:

Teorema 2.4.5. *[Rug93, pág. 255] O par (C, A) é detectável se e só se*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^+.$$

Assim, do Teorema anterior e atendendo ao ponto (ii) do Teorema 2.3.4, pode concluir-se que:

Corolário 2.4.6. *O par (C, A) é detectável se for observável.*

Note-se que um sistema estável, é obviamente estabilizável e detectável, já que os requisitos das definições 2.4.1 e 2.4.4 são satisfeitos respectivamente, tomando L e M como matrizes nulas.

2.5 Função de Transferência

Considere-se o SLIT representado pela equação linear de estado (2.6), com $t_0 = 0$ e onde a condição inicial é nula, isto é, $x(0) = 0$. Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros das equações em (2.6) obtém-se

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad (2.9)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s), \quad (2.10)$$

onde $X(s)$, $U(s)$ e $Y(s)$ representam as transformadas de Laplace de $x(t)$, $u(t)$ e $y(t)$, respectivamente.

Da equação (2.9) tem-se

$$\begin{aligned} sX(s) = AX(s) + BU(s) &\Leftrightarrow sX(s) - AX(s) = BU(s) \\ &\Leftrightarrow (sI - A)X(s) = BU(s) \\ &\Leftrightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Substituindo $X(s)$, dado por (2.11), na equação (2.10) obtém-se

$$\begin{aligned} Y(s) = CX(s) + DU(s) &\Leftrightarrow Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \\ &\Leftrightarrow Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s). \end{aligned} \quad (2.12)$$

A equação (2.12) expressa uma relação entre a entrada e a saída do sistema e constitui a versão de (2.5), para $x_0 = 0$, no domínio das frequências. A função (matriz) $G(s)$ dada por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

é designada por **função (matriz) de transferência** do sistema.

$G(s)$ é uma função racional de s , própria (i.e., cujas entradas possuem numerador com grau não superior ao do denominador). Caso $D = 0$, $G(s)$ é estritamente própria, ou seja, nas suas entradas o numerador tem grau inferior ao do denominador.

Note-se que diferentes quádruplos de matrizes (A_1, B_1, C_1, D_1) e (A_2, B_2, C_2, D_2) podem originar a mesma matriz de transferência $G(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + D_1 = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 + D_2$. Tal acontece, por exemplo, se existir uma matriz invertível S tal que $A_2 = SA_1S^{-1}$, $B_2 = SB_1$, $C_2 = C_1S^{-1}$ e $D_2 = D_1$.

Por outro lado, dada uma matriz racional própria $G(s)$, existe sempre um quádruplo (A, B, C, D) de matrizes de dimensões adequadas tal que

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D,$$

[Vid85, pág. 82]. Assim, o sistema descrito (no domínio das frequências) pela relação entrada/saída:

$$y(s) = G(s)u(s)$$

pode também ser descrito, no domínio do tempo, pelas equações lineares de estado

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases}$$

no sentido de que o seu comportamento entrada/saída é o mesmo para condições iniciais nulas. Diz-se neste caso que as matrizes (A, B, C, D) constituem uma **realização de** $G(s)$. Define-se a **ordem** de uma realização (A, B, C, D) de $G(s)$ como sendo a dimensão do correspondente espaço de estados (que coincide com a dimensão da matriz A).

Diz-se que uma realização de $G(s)$, de ordem n , é **minimal** ou de **ordem mínima**, se, dada qualquer outra realização (A', B', C', D') de $G(s)$, com ordem n' , se verifica $n \leq n'$. Neste caso designa-se n , como sendo o **grau de McMillan** da função de transferência $G(s)$.

A minimalidade de uma realização é caracterizada no teorema que se segue.

Teorema 2.5.1. [Rug93, pág. 142] *Sejam $G(s)$ uma função racional própria e (A, B, C, D) uma sua realização. Então, (A, B, C, D) é uma realização minimal se e só se (A, B) for controlável e (C, A) for observável.*

No que se segue considerar-se-á apenas funções de transferência racionais e próprias.

Definição 2.5.2. *Um número complexo $\lambda \in \mathbb{C}$ diz-se um **pólo** do sistema com função de transferência $G(s)$ (e igualmente de $G(s)$), se existir alguma entrada $G_{ij}(s)$ de $G(s)$ tal que $|G_{ij}(\lambda)| = \infty$.*

Definição 2.5.3. *Um sistema linear e a correspondente função de transferência, dizem-se estáveis no sentido de entrada limitada / saída limitada (**BIBO-estável**), se a saída correspondente a qualquer entrada limitada for ainda um sinal limitado.*

Teorema 2.5.4. [Rug93, pág. 189] *Seja $G(s)$ uma função de transferência racional e própria. $G(s)$ é estável no sentido da definição anterior se e só se $G(s)$ não tem pólos em \mathbb{C}^+ , isto é, se e só se todos os seus pólos possuem parte real negativa.*

A relação entre BIBO-estabilidade de uma função de transferência e a estabilidade (também chamada interna) das respectivas realizações é dada pelo seguinte resultado.

Teorema 2.5.5. [Rug93, pág. 187] *Seja $G(s)$ uma função de transferência racional própria BIBO-estável. Então, se (A, B, C, D) for uma realização controlável e observável de $G(s)$, a matriz A é estável.*

2.6 Factorização de Funções de Transferência Racionais

Sejam \mathcal{R} um anel comutativo e \mathcal{F} o correspondente corpo de fracções. Denote-se por $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ o conjunto das matrizes com entradas em \mathcal{R} e por $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ o conjunto das matrizes com entradas em \mathcal{F} .

Definição 2.6.1. *Seja $A \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$. A matriz quadrada $D \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ é um **divisor esquerdo** de A , ou A é um **múltiplo direito** de D , se existe uma matriz $C \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ tal que $A = DC$.*

Definição 2.6.2. *Sejam $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ duas matrizes com o mesmo número de colunas. Então a matriz quadrada $D \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ é o **máximo divisor comum esquerdo** de A, B se*

1. *D é divisor esquerdo de A e de B*
2. *D é múltiplo direito de qualquer divisor comum esquerdo de A, B (isto é, se D' é divisor comum esquerdo de A e de B , então $D = D'L$ para alguma matriz L).*

Definição 2.6.3. *Duas matrizes $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ com o mesmo número de colunas são **coprimas à esquerda** se todos os divisores comuns esquerdos de A e B são unimodulares.*

Definição 2.6.4. *Seja $P \in \mathcal{M}(\mathcal{F})$. Um par (N, D) onde $N, D \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, é uma **factorização coprime esquerda (FCE)** de P se*

1. *D é quadrada e $|D| \neq 0$,*
2. *$P = D^{-1}N$ e*
3. *N e D são coprimas à esquerda.*

Os conceitos de máximo divisor comum direito e factorização coprime direita são definidos de forma análoga, com as alterações óbvias.

Neste trabalho considera-se que \mathcal{R} é o anel das funções racionais próprias e estáveis, cujo corpo das fracções coincide com o conjunto das funções racionais $\mathbb{R}(s)$ (ver [Vid85]).

Dada uma matriz racional própria $G(s) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}(s))$ é possível obter uma FCE sobre $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ do seguinte modo.

Seja (A, B, C, D) uma realização estabilizável e detectável de $G(s)$. Considerem-se $A_0 = A - BK$, $\tilde{A}_0 = A - FC$, onde K e F são matrizes constantes tais que os valores próprios de A_0 e \tilde{A}_0 possuem parte real negativa. Então, uma FCE de $G(s)$ é dada por $G(s) = \tilde{D}_g^{-1} \tilde{N}_g$, onde

$$\tilde{N}_g = C(sI - \tilde{A}_0)^{-1}B \in \mathcal{M}(\mathcal{R}), \quad (2.13)$$

$$\tilde{D}_g = I - C(sI - \tilde{A}_0)^{-1}F \in \mathcal{M}(\mathcal{R}), \quad (2.14)$$

[Vid85, pág.84].

Capítulo 3

Estabilidade de Sistemas Comutados

3.1 Introdução

Um sistema comutado pode ser descrito por uma família de sistemas conjuntamente com uma regra que coordena a comutação entre estes sistemas.

Neste trabalho considera-se a comutação com base numa família de sistemas lineares de espaço de estados $\{\Sigma_p, p \in \mathcal{P}\}$, onde o conjunto de índices \mathcal{P} é tomado como sendo finito.

Sejam (A_p, B_p, C_p, D_p) , $p \in \mathcal{P}$ as matrizes do modelo de espaço de estados correspondentes ao sistema Σ_p , seja ainda $\sigma : [0, +\infty[\rightarrow \mathcal{P}$ uma função do tempo constante por pedaços, denominada por ***senal de comutação***. O correspondente ***sistema linear comutado*** é então dado pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) \\ y(t) = C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}u(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

Supõe-se que o estado de (3.1) não se altera nos instantes de comutação, i.e., a solução $x(\cdot)$ é sempre contínua. Note-se que um sistema deste tipo constitui um caso

especial de um sistema linear variante no tempo, com a particularidade de a variação dos parâmetros ser ditada pelo sinal de comutação.

Pretende-se estabelecer condições que garantam que o sistema linear comutado (3.1) é estável, no sentido da Definição 2.2.1.

A estabilidade de sistemas comutados tem sido objecto de estudo nos últimos tempos, [NB94, SN98, LM99, LHM99, AL01, HM02]. Em [LM99] são referidos três problemas na estabilidade de sistemas comutados: encontrar condições que garantam que o sistema comutado é estável para qualquer sinal de comutação, identificar as classes de sinais de comutação para as quais o sistema comutado é estável e construir um sinal de comutação que torne o sistema comutado estável. Neste trabalho, vai-se focar o primeiro destes problemas, isto é, procurar encontrar condições que garantam que o sistema linear comutado

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) \quad (3.2)$$

é estável para qualquer sinal de comutação.

Uma das condições necessárias para a estabilidade de sistemas com comutação arbitrária é que todos os subsistemas individuais sejam estáveis. De facto, se o sistema p for instável, o sistema comutado será instável se se considerar $\sigma(t) = p$, $t \in [0, +\infty[$.

Assim, pelo Teorema 2.2.2, conclui-se que se o sistema comutado for estável, as matrizes A_p possuem valores próprios com parte real negativa.

Note-se que, como ilustra o exemplo que se segue, o recíproco não se verifica, ou seja, o facto de todos os sistemas individuais serem estáveis não implica que o sistema linear comutado também o seja.

Exemplo 3.1.1. *Considere-se o sistema comutado em \mathbb{R}^2*

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad (3.3)$$

com sinal de comutação $\sigma : [0, +\infty[\rightarrow \{1, 2\}$ e onde as matrizes A_p , $p \in \{1, 2\}$, são

definidas por

$$A_1 := \begin{pmatrix} -0.05 & 2 \\ -1 & -0.05 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} -0.05 & 1 \\ -2 & -0.05 \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios de A_1 e A_2 coincidem e são dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0.1 \pm \sqrt{8}i}{2}.$$

Portanto, uma vez que $\Re(\lambda_{1,2}) < 0$, os sistemas individuais $\dot{x}(t) = A_1x(t)$ e $\dot{x}(t) = A_2x(t)$ são estáveis. No entanto, para um estado inicial qualquer, considerando $\sigma(t) = 1$ quando a trajectória se encontra no 1.º ou 3.º quadrante de \mathbb{R}^2 e $\sigma(t) = 2$ caso contrário, o sistema comutado (3.3) é instável, como ilustra o diagrama de fase da Figura 3.1.

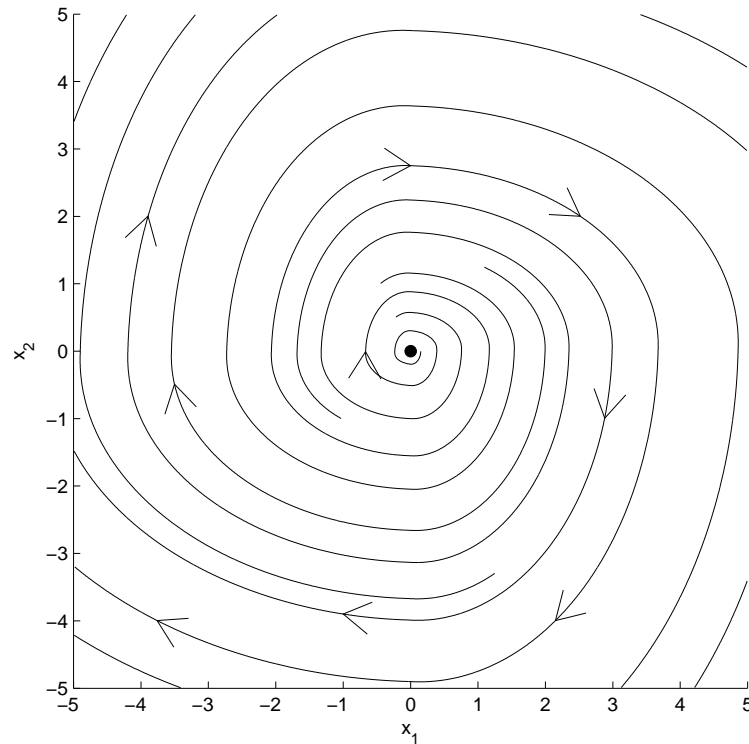


Figura 3.1: Sistema Comutado Instável

Outros exemplos do facto acima referido podem ser encontrados em [Bra98, DBPL00, AL01].

Portanto, a questão consiste em encontrar outras condições (que não em termos de valores próprios) sobre a família de matrizes $\{A_p, p \in \mathcal{P}\}$ que garantam que o sistema linear comutado é estável para qualquer sinal de comutação σ .

3.2 Critério de Lyapunov

Uma vez que, como já foi referido, os sistemas comutados constituem um caso particular de sistemas variantes no tempo, a sua estabilidade pode ser estudada em termos de funções de Lyapunov. Em [LM99], são estabelecidas condições para a estabilidade de um sistema comutado com base na existência de uma *função de Lyapunov quadrática comum*.

Definição 3.2.1. A função $V(x)$ diz-se uma **função de Lyapunov comum (FLC)** para o sistema comutado $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$, com $\sigma(t) \in \mathcal{P}$, quando é uma função de Lyapunov para cada um dos sistemas $\dot{x}(t) = A_p x(t)$, com $p \in \mathcal{P}$ fixo.

Atendendo à Proposição 2.2.4, conclui-se que:

Proposição 3.2.2. Existe Função de Lyapunov Quadrática Comum (FLQC) para o sistema linear de comutação (3.2) se e só se existirem duas matrizes simétricas definidas positivas P e Q tais que

$$A_p^T P + P A_p < -Q, \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha-se que existe uma FLQC, $V(x) = x^T P x$, onde P é uma matriz simétrica e definida positiva.

Atendendo à Definição 2.2.3 tem-se que, para cada sistema $\dot{x}(t) = A_p x(t)$

$$\frac{d}{dt} \left(x^T(t) P x(t) \right) < 0,$$

o que equivale a verificar-se a desigualdade

$$x^T(t) \left(A_p^T P + P A_p + \dot{P} \right) x(t) < 0.$$

Como $\dot{P} = 0$ e $x(t)$ pode assumir todos os valores em \mathbb{R}^n , como já foi anteriormente referido na demonstração da Proposição 2.2.4, tem-se que

$$A_p^T P + P A_p < 0.$$

Isto significa que existe uma constante finita positiva ν_p tal que

$$A_p^T P + P A_p \leq -\nu_p I.$$

Uma vez que o conjunto de índices \mathcal{P} é compacto, também o conjunto $\{\nu_p, p \in \mathcal{P}\}$ o é, pelo que existe $\nu > 0$ tal que $\nu_p \geq \nu, p \in \mathcal{P}$.

Isto permite concluir que existem duas matrizes simétricas e definidas positivas, P e $Q = \nu I$ tais que

$$A_p^T P + P A_p \leq -Q, \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

(\Leftarrow) Suponha-se que existem duas matrizes simétricas e definidas positivas, P e Q tais que

$$A_p^T P + P A_p \leq -Q, \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

Então, pela Proposição 2.2.4, $V(x) = x^T P x$ é uma FLQ para cada sistema $\dot{x}(t) = A_p x(t)$, pelo que é uma FLQC para o sistema comutado. \square

O Lema que se segue permitirá relacionar a existência de uma FLQC com a estabilidade do sistema comutado.

Lema 3.2.3. *Se existirem duas matrizes simétricas definidas positivas P e Q tais que*

$$A_p^T P + P A_p < -Q \quad \forall p \in \mathcal{P},$$

então o sistema linear comutado (3.2) é estável.

Demonstração. Suponha-se que existem duas matrizes simétricas definidas positivas P e Q tais que

$$A_p^T P + P A_p < -Q \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

Considere-se $P(t) \equiv P$ e $A(t) = A_{\sigma(t)}$, onde $\sigma(t)$ toma valores em \mathcal{P} . Sejam η e ρ , o menor e o maior dos valores próprios de P , respectivamente, e ν o menor dos valores próprios de Q .

Uma vez que P é simétrica, é diagonalizável através de uma matriz ortogonal, isto é, existe uma matriz ortogonal U tal que $D = U^T P U$, onde D é a matriz diagonal dos valores próprios de P (que são todos positivos pois $P > 0$). Tem-se então que:

$$\begin{aligned}
 D \geq \eta I &\Leftrightarrow D - \eta I \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow U^T P U - \eta U^T U \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow U^T (P - \eta I) U \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow P - \eta I \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow P \geq \eta I.
 \end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga, conclui-se que $P \leq \rho I$ e $Q \geq \nu I$.

Assim,

$$\begin{aligned}
 A_p^T P + P A_p \leq -Q &\Leftrightarrow A(t)^T P(t) + P(t) A(t) + \dot{P}(t) \leq -Q, \text{ pois } \dot{P}(t) = 0 \\
 &\Rightarrow A(t)^T P(t) + P(t) A(t) + \dot{P}(t) \leq -\nu I, \forall t.
 \end{aligned}$$

Portanto, atendendo ao Teorema 2.2.6, o sistema linear comutado (3.2) é estável. □

Resulta do Lema 3.2.3 e da Proposição 3.2.2 que:

Teorema 3.2.4. *O sistema linear de comutação (3.2) é estável se existe uma FLQC para o sistema linear de comutação (3.2).*

O problema inicial limita-se agora a encontrar condições que garantam a existência de uma FLQC para o sistema linear de comutação (3.2).

3.3 Existência de FLQC

3.3.1 Sistemas com Matrizes que Comutam aos Pares

Em [NB94] apresenta-se a construção de uma FLQC para um sistema comutado que se baseia numa família de sistemas $\{\Sigma_p, p \in \mathcal{P}\}$ com matrizes A_p estáveis, isto é, com espectro contido em \mathbb{C}^- , que comutam aos pares (i.e., $A_i A_j = A_j A_i$ para quaisquer $i, j \in \mathcal{P}$).

Proposição 3.3.1. [NB94] *Sejam A_i , $i \in \mathcal{P} = \{1, \dots, N\}$, matrizes estáveis (com a mesma dimensão) que comutam aos pares. Sejam ainda P_1, P_2, \dots, P_N , simétricas definidas positivas, as únicas matrizes que satisfazem as equações de Lyapunov*

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -I,$$

$$A_i^T P_i + P_i A_i = -P_{i-1}, i = 2, 3, \dots, N.$$

Então, a função $V(x) = x^T P_N x$ é uma FLQC para o sistema comutado $\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t)$, $\sigma(t) \in \mathcal{P}$.

Demonstração. Atendendo à Proposição 2.2.4, basta mostrar que

$$A_i^T P_N + P_N A_i < 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N.$$

Para esse efeito, definam-se as matrizes

$$P_{ij} = A_i^T P_j + P_j A_i.$$

Se se mostrar que $P_{ij} < 0$ para $i = 1, 2, \dots, N$, $j = i, i + 1, \dots, N$, o resultado é obtido pela escolha de $j = N$ para cada i .

No sentido de usar um processo indutivo, tome-se $i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

A partir de

$$A_i^T P_i + P_i A_i = -P_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, N, \quad (3.4)$$

verifica-se que $P_{ii} = -P_{i-1} < 0$.

Suponha-se $P_{ij} < 0$ para algum $j \in \{i, i+1, \dots, N-1\}$, então usando (3.4) e a comutatividade de A_i e A_{j+1} , tem-se que

$$\begin{aligned}
& A_{j+1}^T \left(-P_{i,j+1} \right) + \left(-P_{i,j+1} \right) A_{j+1} = \\
&= A_{j+1}^T \left(-A_i^T P_{j+1} - P_{j+1} A_i \right) + \left(-A_i^T P_{j+1} - P_{j+1} A_i \right) A_{j+1} \\
&= - \left(A_{j+1}^T A_i^T P_{j+1} + A_{j+1}^T P_{j+1} A_i + A_i^T P_{j+1} A_{j+1} + P_{j+1} A_i A_{j+1} \right) \\
&= - \left(A_i^T \left(A_{j+1}^T P_{j+1} \right) + A_{j+1}^T P_{j+1} A_i + A_i^T P_{j+1} A_{j+1} + \left(P_{j+1} A_{j+1} \right) A_i \right) \\
&= - \left(A_i^T \left(-P_j - P_{j+1} A_{j+1} \right) + A_{j+1}^T P_{j+1} A_i + A_i^T P_{j+1} A_{j+1} + \left(-P_j - A_{j+1}^T P_{j+1} \right) A_i \right) \\
&= - \left(-A_i^T P_j - A_i^T P_{j+1} A_{j+1} + A_{j+1}^T P_{j+1} A_i + A_i^T P_{j+1} A_{j+1} - P_j A_i - A_{j+1}^T P_{j+1} A_i \right) \\
&= A_i^T P_j + P_j A_i \\
&= P_{ij} < 0,
\end{aligned}$$

o que, tendo em conta a estabilidade de A_{j+1} e o Teorema 2.2.5, mostra que $-P_{i,j+1} > 0$ e portanto $P_{i,j+1} < 0$. Conclui-se assim que $P_{ij} < 0$ para $i = 1, 2, \dots, N$ e $j = i, i+1, \dots, N$.

Logo, $V(x) = x^T P_N x$ é uma FLQ para os sistemas $\dot{x}(t) = A_i x(t)$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$ e consequentemente uma FLQC para o correspondente sistema comutado. \square

3.3.2 Sistemas com Matrizes Simultaneamente Triangularizáveis

Uma outra condição suficiente para a existência de uma FLQC para o sistema linear (3.2), onde o conjunto de índices \mathcal{P} é finito, é dada em [SN98]. Esta condição consiste na existência de uma transformação de semelhança associada a uma matriz complexa não singular, T , que transforma todas as matrizes A_i , $i \in \mathcal{P}$, em matrizes triangulares, ou seja tal que $TA_i T^{-1}$ é uma matriz triangular superior¹. Diz-se que neste caso as

¹Note-se que toda a matriz real é triangularizável por uma transformação de semelhança complexa (basta tomar uma transformação que a reduza à sua forma canónica de Jordan complexa), mas nem sempre é triangularizável através de uma transformação de semelhança real.

matrizes A_i são *simultaneamente triangularizáveis*.

Proposição 3.3.2. [LHM99] *Sejam \mathcal{P} um conjunto finito de índices e $\{A_p, p \in \mathcal{P}\}$ um conjunto de matrizes estáveis e simultaneamente triangularizáveis, então existe uma FLQC para o correspondente sistema linear comutado (3.2).*

Demonstração. De acordo com a Proposição 3.2.2, para mostrar que existe uma FLQC para o sistema linear comutado (3.2), basta encontrar duas matrizes simétricas definidas positivas P e Q tais que

$$A_p^T P + P A_p < -Q, \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

Seja T uma matriz complexa não singular que triangulariza todas as matrizes A_p , i.e., tal que

$$A_p = T \tilde{A}_p T^{-1}, \quad (3.5)$$

onde \tilde{A}_p é uma matriz complexa triangular da forma

$$\tilde{A}_p = \begin{pmatrix} (\tilde{A}_p)_{11} & (\tilde{A}_p)_{12} & \dots & (\tilde{A}_p)_{1n} \\ 0 & (\tilde{A}_p)_{22} & \dots & (\tilde{A}_p)_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\tilde{A}_p)_{nn} \end{pmatrix},$$

e n é a dimensão de A_p .

Para provar o pretendido, começa-se por mostrar que existe uma matriz real simétrica definida positiva \tilde{P} tal que

$$-\tilde{A}_p^* \tilde{P} - \tilde{P} \tilde{A}_p > 0, \quad p \in \mathcal{P}, \quad (3.6)$$

onde a matriz \tilde{A}_p^* é a matriz transposta conjugada da matriz \tilde{A}_p ,

$$\tilde{A}_p^* = \begin{pmatrix} \overline{(\tilde{A}_p)_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ \overline{(\tilde{A}_p)_{12}} & \overline{(\tilde{A}_p)_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{(\tilde{A}_p)_{1n}} & \overline{(\tilde{A}_p)_{2n}} & \dots & \overline{(\tilde{A}_p)_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Suponha-se que \tilde{P} toma a forma de uma matriz real diagonal

$$\tilde{P} = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n),$$

então

$$-\tilde{A}_p^* \tilde{P} - \tilde{P} \tilde{A}_p = \begin{pmatrix} -2p_1 \Re(\tilde{A}_p)_{11} & -p_1(\tilde{A}_p)_{12} & \dots & -p_1(\tilde{A}_p)_{1n} \\ -p_1 \overline{(\tilde{A}_p)_{12}} & -2p_2 \Re(\tilde{A}_p)_{22} & \dots & -p_2(\tilde{A}_p)_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_1 \overline{(\tilde{A}_p)_{1n}} & -p_2 \overline{(\tilde{A}_p)_{2n}} & \dots & -2p_n \Re(\tilde{A}_p)_{nn} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Mostra-se, através de um processo indutivo, que é possível escolher p_1, \dots, p_n positivos de forma a que todos os menores principais da matriz (3.7) sejam positivos ². Pelo Critério de Sylvester [Rug93, pág. 9], isto implica que a matriz seja definida positiva.

Combinando com (3.5), isto significa que

$$\begin{aligned} -(T^{-1}A_p T)^* \tilde{P} - \tilde{P}(T^{-1}A_p T) > 0 &\Leftrightarrow -T^{-1*}(T^{-1}A_p T)^* \tilde{P} T^{-1} - T^{-1*} \tilde{P}(T^{-1}A_p T) T^{-1} > 0 \\ &\Leftrightarrow -T^{-1*} T^* A_p^* T^{-1*} \tilde{P} T^{-1} - T^{-1*} \tilde{P} T^{-1} A_p T T^{-1} > 0 \\ &\Leftrightarrow -A_p^* T^{-1*} \tilde{P} T^{-1} - T^{-1*} \tilde{P} T^{-1} A_p > 0. \end{aligned}$$

Definindo-se $\hat{P} = T^{-1*} \tilde{P} T^{-1}$ e $Q_p = A_p^* T^{-1*} \tilde{P} T^{-1} + T^{-1*} \tilde{P} T^{-1} A_p$ verifica-se que

$$A_p^* \hat{P} + \hat{P} A_p = Q_p$$

ou mais explicitamente, uma vez que as matrizes A_p são reais,

$$A_p^T (\Re \hat{P} + \sqrt{-1} \Im \hat{P}) + (\Re \hat{P} + \sqrt{-1} \Im \hat{P}) A_p = \Re Q_p + \sqrt{-1} \Im Q_p.$$

Segue então que

$$A_p^T \Re \hat{P} + \Re \hat{P} A_p = \Re Q_p.$$

Mas, é possível provar que as matrizes $\Re \hat{P}$ e $\Re Q_p$ são simétricas e definidas positivas. De facto, como \hat{P} é hermitica, $\Re \hat{P}$ é simétrica e $\Im \hat{P}$ é anti-simétrica. Além

²Ver Lema A.0.1 em Apêndice.

disso, uma vez que \hat{P} é definida positiva, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ tem-se que

$$0 < x^* \hat{P} x = x^T \hat{P} x = x^T \Re \hat{P} x + \sqrt{-1} x^T (\Im \hat{P}) x = x^T \Re \hat{P} x.$$

Note-se que $x^T (\Im \hat{P}) x = 0$ já que $x^T (\Im \hat{P}) x = (x^T (\Im \hat{P}) x)^T = x^T (\Im \hat{P})^T x = -x^T (\Im \hat{P}) x$, devido à anti-simetria de $\Im \hat{P}$.

Analogamente, é claro que $\Re Q_p$ é simétrica e definida positiva, já que $0 < x^T Q_p x = x^T \Re Q_p x$, para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ e $p \in \mathcal{P}$.

Dado que o conjunto $\{A_p, p \in \mathcal{P}\}$ é compacto, o conjunto das matrizes definidas positivas $\{Q_p, p \in \mathcal{P}\}$ também é compacto, e por conseguinte, existe uma matriz real simétrica definida positiva Q tal que $\Re Q_p \geq Q$ para todo o $p \in \mathcal{P}$. Portanto, observa-se que as matrizes $P = \Re \hat{P}$ e Q satisfazem as condições da Proposição 3.2.2, pelo que se conclui que existe FLQC para o sistema linear comutado (3.2). \square

Note-se que facto das matrizes reais $A_i, i = 1, 2, 3, \dots, N$, comutarem aos pares é uma condição suficiente [SN98] (mas não necessária) para a existência de uma transformação T que as triangularize simultaneamente.

Exemplo 3.3.3. *Sejam $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Existe uma transformação T que as triangulariza simultaneamente A_1 e A_2 .*

De facto, seja $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, então $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e

$$TA_1T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$TA_2T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

No entanto,

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = A_2A_1.$$

Assim, a Proposição 3.3.2 constitui um resultado mais forte que a Proposição 3.3.1.

Definição 3.3.4. Diz-se que um N -uplo de matrizes (A_1, A_2, \dots, A_N) , cada uma das quais de dimensão $n \times n$, tem a **propriedade** P se as matrizes $A_i, i = 1, 2, \dots, N$ forem simultaneamente triangularizáveis.

A propriedade P tem sido objecto de estudo da Teoria de Matrizes. Referem-se de seguida alguns resultados relativos a esta propriedade, sem contudo entrar em pormenor ou apresentar as respectivas demonstrações que saem fora do âmbito deste trabalho.

Teorema 3.3.5. [Laf78] Sejam $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $A_1 A_2 - A_2 A_1 = B$ onde B é uma matriz de característica 1. Então, o par A_1 e A_2 possui a propriedade P .

Verifica-se que a propriedade P está intimamente relacionada com a propriedade L que a seguir se define.

Definição 3.3.6. Sejam A_1, A_2 duas matrizes $n \times n$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ os respectivos valores próprios. Diz-se que o par (A_1, A_2) possui a **propriedade** L (ou que é um par L) se os valores próprios de A_1 e A_2 podem ser ordenados de tal forma que os valores próprios de $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ são $\alpha_1 \lambda_i + \alpha_2 \mu_i, i = 1, 2, \dots, n$.

No caso geral, a propriedade L é necessária, mas não suficiente para a propriedade P [Laf78], no entanto, no caso particular de matrizes com característica 1 estas duas propriedades são equivalentes.

Teorema 3.3.7. [Laf78] Sejam A_1, A_2 duas matrizes tais que A_2 tem característica 1. (A_1, A_2) possui a propriedade L se e só se possui a propriedade P .

Em [LM99, LHM99] são dadas condições mais gerais para a triangularização simultânea das matrizes A_p , tendo em conta as propriedades de álgebras de Lie.

Definição 3.3.8. (i) Uma **álgebra de Lie** \mathfrak{g} é um espaço vectorial de dimensão finita munido de Parêntesis de Lie, i.e., uma função bilinear, anti-simétrica $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que satisfaz a identidade de Jacobi $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$.

(ii) Dada uma família de matrizes quadradas com a mesma dimensão $\{A_p : p \in \mathcal{P}\}$, define-se a **álgebra de Lie** $\mathfrak{g} = \{A_p : p \in \mathcal{P}\}_{AL}$ **gerada por estas matrizes** como sendo a menor álgebra de Lie com parêntesis $[A, B] = AB - BA$ que contém as matrizes dadas.

Definição 3.3.9. Dada uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , a **sequência descendente de ideais** $\mathfrak{g}^{(k)}$ é definida como se segue:

$$\mathfrak{g}^{(1)} := \mathfrak{g}$$

$$\mathfrak{g}^{(k+1)} := [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}] \subset \mathfrak{g}^{(k)}.$$

Definição 3.3.10. Se existir k^* tal que $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ para um $k \geq k^*$, então \mathfrak{g} diz-se **solúvel**.

Definição 3.3.11. Define-se a **sequência descendente de ideais** \mathfrak{g}^k por:

$$\mathfrak{g}^1 := \mathfrak{g}$$

$$\mathfrak{g}^{k+1} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] \subset \mathfrak{g}^k.$$

Definição 3.3.12. Se existir k^* tal que $\mathfrak{g}^k = 0$ para um $k \geq k^*$, então \mathfrak{g} diz-se **nilpotente**.

Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie gerada por duas matrizes A e B , i.e., $\mathfrak{g} = \{A, B\}_{AL}$, então tem-se

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} = \text{span}\{A, B, [A, B], [A, [A, B]], \dots\}$$

$$\mathfrak{g}^{(2)} = \mathfrak{g}^2 = \text{span}\{[A, B], [A, [A, B]], \dots\}$$

$$\mathfrak{g}^{(3)} = \text{span}\{[[A, B], [A, [A, B]]], \dots\} \subset \mathfrak{g}^3 = \text{span}\{[A, [A, B]], [B, [A, B]], \dots\}$$

e assim sucessivamente.

Note-se que qualquer Álgebra de Lie *nilpotente* é *solúvel* [Hum72], mas o recíproco não é verdadeiro.

Exemplo 3.3.13. O conjunto \mathfrak{g} de todas as matrizes triangulares superiores 2×2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

é uma álgebra de Lie solúvel. No entanto, não é uma álgebra de Lie nilpotente.

De facto, note-se que $\mathfrak{g} = \text{span}\{e_{11}, e_{12}, e_{22}\}$, onde

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, pela definição de parêntesis de Lie,

$$[e_{11}, e_{12}] = e_{11}e_{12} - e_{12}e_{11} = e_{12},$$

$$[e_{11}, e_{22}] = e_{11}e_{22} - e_{22}e_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O,$$

$$[e_{22}, e_{12}] = e_{22}e_{12} - e_{12}e_{22} = -e_{12}.$$

Atendendo à Definição 3.3.9, tem-se

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g} = \text{span}\{e_{11}, e_{12}, e_{22}\},$$

$$\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] = \text{span}\{[e_{11}, e_{12}], [e_{11}, e_{22}], [e_{22}, e_{12}]\} = \text{span}\{e_{12}, O, -e_{12}\} = \text{span}\{e_{12}\},$$

$$\mathfrak{g}^{(3)} = [\mathfrak{g}^{(2)}, \mathfrak{g}^{(2)}] = \text{span}\{[e_{12}, e_{12}]\} = \text{span}\{O\} = O.$$

Portanto, pela Definição 3.3.10, \mathfrak{g} é solúvel.

Por outro lado, pela Definição 3.3.11, tem-se

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} = \text{span}\{e_{11}, e_{12}, e_{22}\},$$

$$\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1] = \text{span}\{[e_{11}, e_{12}], [e_{11}, e_{22}], [e_{22}, e_{12}]\} = \text{span}\{e_{12}, O, -e_{12}\} = \text{span}\{e_{12}\},$$

$$\mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2] = \text{span}\{[e_{11}, e_{12}], [e_{12}, e_{12}], [e_{22}, e_{12}]\} = \text{span}\{e_{12}, O, -e_{12}\} = \text{span}\{e_{12}\},$$

continuando assim sucessivamente, tem-se

$$\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}] = \text{span}\{e_{12}\}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, pela Definição 3.3.12, \mathfrak{g} não é nilpotente.

O resultado que se segue, afirma que uma condição suficiente para a triangularização simultânea de um conjunto de matrizes é a solubilidade da respectiva álgebra de Lie.

Proposição 3.3.14. *[Hum72] Se a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \{A_p : p \in \mathcal{P}\}_{AL}$ gerada pelas matrizes A_p for solúvel, então as matrizes A_p são simultaneamente triangularizáveis.*

Note-se que as matrizes A_p , $p \in \mathcal{P}$ comutam aos pares se e só se $[A_p, A_q] := A_p A_q - A_q A_p = 0, p, q \in \mathcal{P}$. Neste caso a correspondente álgebra de Lie \mathfrak{g} é obviamente solúvel. Deste modo pela Proposição 3.3.14 resulta que, se as matrizes A_p comutam, então são simultaneamente triangularizáveis para $p \in \mathcal{P}$. Isto corresponde ao resultado apresentado na Proposição 3.3.2.

Com base no Teorema 3.2.4, nas Proposições 3.3.2 e 3.3.14 conclui-se finalmente que:

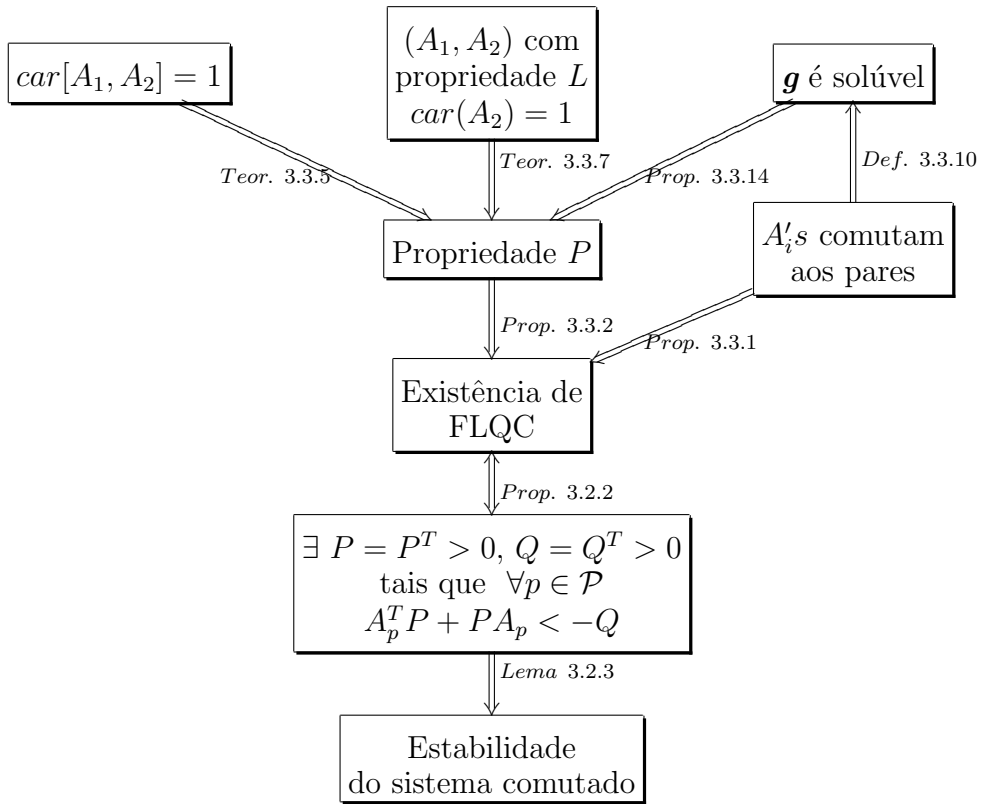
Teorema 3.3.15. *Se a Álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \{A_p : p \in \mathcal{P}\}_{AL}$ é solúvel, então o sistema linear comutado (3.2) é estável.*

Em [AL01] derivam-se outros resultados sobre a estabilidade de sistemas comutados em termos de álgebras de Lie, mas com uma abordagem diferente, que não passa pela construção de uma função de Lyapunov comum, e que propositadamente são omitidos neste trabalho.

3.4 Síntese

Apresenta-se nesta secção um esquema que resume as condições que foram sendo estabelecidas ao longo deste capítulo para a estabilidade do sistema (3.1).

Seja $\{A_p : p \in \mathcal{P}\}$ o conjunto de matrizes do sistema associadas ao sistema comutado (3.1). Uma vez que a estabilidade destas matrizes é uma condição necessária para a estabilidade do sistema comutado, supõe-se que elas são todas estáveis. Considere-se também a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \{A_p : p \in \mathcal{P}\}_{AL}$ gerada pelas matrizes $A_p, p \in \mathcal{P}$. As condições derivadas neste capítulo podem ser sintetizadas no seguinte esquema:



Capítulo 4

Controlo Comutado

4.1 Introdução

No capítulo anterior foram analisadas condições para as quais um sistema linear comutado é estável. No presente capítulo, pretende-se estabelecer a estabilidade de um sistema controlado através de um esquema de controlo comutado. Mais concretamente, considera-se um processo fixo \mathbf{P} e um banco de controladores \mathcal{K} , sendo o controlo efectuado em diferentes períodos de tempo por um dos controladores do banco. Uma vez que o controlador activo vai variando, por comutação entre os elementos do banco \mathcal{K} , diz-se, neste caso, que se está na presença de um esquema de controlo comutado. Como é óbvio, o sistema em malha fechada é um sistema comutado como os considerados no capítulo anterior.

O esquema de realimentação usado é o representado na figura seguinte

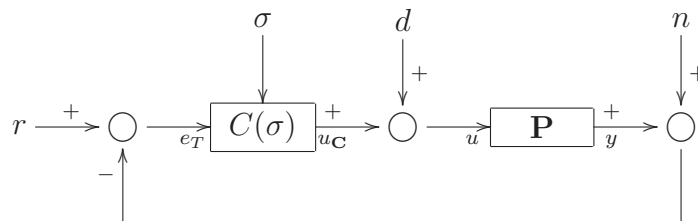


Figura 4.1: Esquema de Realimentação

Nesta figura, u é a entrada do processo, y é a sua saída, r é um sinal de referência limitado, d é uma perturbação limitada, e n um ruído na medição que se supõe igualmente limitado; $C(\sigma)$ é um controlador variante no tempo resultante da comutação entre os controladores do banco \mathcal{K} de acordo com o sinal de comutação σ .

Considere-se que o processo \mathbf{P} , com matriz de transferência estritamente própria $H_{\mathbf{P}}$, é modelado por um sistema linear, invariante no tempo, estabilizável e detectável da forma

$$\begin{cases} \dot{x}_{\mathbf{P}} = Ax_{\mathbf{P}} + Bu \\ y = Cx_{\mathbf{P}}, \end{cases}$$

e que o banco de controladores é constituído por matrizes de transferência K_p , isto é $\mathcal{K} = \{K_p : p \in \mathcal{P}\}$, sendo, para cada p , K_p realizada pelo seguinte modelo de espaço de estados estabilizável e detectável

$$\begin{cases} \dot{x}_{\mathbf{C}} = F_px_{\mathbf{C}} + G_pe_T \\ u_{\mathbf{C}} = H_px_{\mathbf{C}} + J_pe_T, \end{cases}$$

onde $u_{\mathbf{C}} = u - d$ e $e_T = r - (y + n)$.

A conexão do processo \mathbf{P} com o controlador K_p , de acordo com o esquema da figura, resulta no sistema em malha fechada

$$\begin{cases} \dot{x} = A_px + B_pw \\ y = C_px, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde

$$x := \begin{pmatrix} x_{\mathbf{P}} \\ x_{\mathbf{C}} \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} d \\ r - n \end{pmatrix}, \quad A_p := \begin{pmatrix} A - BJ_pC & BH_p \\ -G_pC & F_p \end{pmatrix},$$

$$B_p := \begin{pmatrix} B & BJ_p \\ 0 & G_p \end{pmatrix} \text{ e } C_p := \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}.$$

Supõe-se que cada controlador do banco \mathcal{K} estabiliza o processo \mathbf{P} no sentido da definição que se segue.

Definição 4.1.1 (Controlador Estabilizante). *Um controlador com matriz de transferência K estabiliza um processo com função de transferência $H_{\mathbf{P}}$ se, para quaisquer*

realizações estabilizáveis e detectáveis $\{A, B, C\}$ e $\{F, G, H, J\}$ de $H_{\mathbf{P}}$ e K respectivamente, a conexão de realimentação mostrada na figura 4.1 for estável, i. e., os valores próprios da matriz

$$\begin{pmatrix} A - BJC & BH \\ -GC & F \end{pmatrix}$$

possuírem parte real negativa.

Assim, o sistema (4.1) é estável para todo o valor fixo de $p \in \mathcal{P}$. Como já foi referido, a comutação entre os controladores faz-se através do sinal de comutação σ , que indica em cada instante qual o controlador a activar, i.e., se $\sigma(t) = p$, então o processo será controlado pelo controlador K_p . Daqui resulta o sistema comutado

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{\sigma(t)}x + B_{\sigma(t)}w \\ y = C_{\sigma(t)}x, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde

$$x := \begin{pmatrix} x_{\mathbf{P}} \\ x_{\mathbf{C}} \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} d \\ r - n \end{pmatrix}, \quad A_{\sigma(t)} := \begin{pmatrix} A - BJ_{\sigma(t)}C & BH_{\sigma(t)} \\ -G_{\sigma(t)}C & F_{\sigma(t)} \end{pmatrix},$$

$$B_{\sigma(t)} := \begin{pmatrix} B & BJ_{\sigma(t)} \\ 0 & G_{\sigma(t)} \end{pmatrix} \text{ e } C_{\sigma(t)} := \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}.$$

Como foi visto no capítulo anterior, note-se que, apesar do facto de cada controlador K_p ser estabilizante, ou seja, de cada matriz A_p do sistema em malha fechada ser estável, pode acontecer que o sistema comutado não o seja. Na secção que se segue mostra-se que é possível garantir a estabilidade do sistema comutado através da escolha de realizações adequadas para os controladores do banco \mathcal{K} .

4.2 Estabilidade do Esquema de Controlo Comutado

Considere-se um processo com matriz de transferência $H_{\mathbf{P}}$ e tome-se um controlador $K^* \in \mathcal{K}$ que estabiliza $H_{\mathbf{P}}$.

Atendendo a [Vid85, pág. 108] é possível obter todos os controladores K que estabilizam $H_{\mathbf{P}}$ a partir de $H_{\mathbf{P}}$ e K^* como

$$K = (X_{\mathbf{C}} - SY_{\mathbf{P}})^{-1}(Y_{\mathbf{C}} + SX_{\mathbf{P}}),$$

onde $X_{\mathbf{P}}^{-1}Y_{\mathbf{P}} = H_{\mathbf{P}}$ é uma factorização coprima esquerda (FCE) da matriz de transferência do processo [cf. Secção 2.6], $X_{\mathbf{C}}^{-1}Y_{\mathbf{C}} = K^*$ é uma FCE da matriz de transferência do controlador K^* e S é uma matriz de transferência racional, própria e estável.

Em particular, para cada controlador $K_p \in \mathcal{K}$, existe S_p nas condições anteriores, tal que

$$K_p = (X_{\mathbf{C}} - S_pY_{\mathbf{P}})^{-1}(Y_{\mathbf{C}} + S_pX_{\mathbf{P}}). \quad (4.3)$$

Note-se que, resolvendo (4.3) em ordem a S_p , se obtém:

$$S_p = (-Y_{\mathbf{C}} + X_{\mathbf{C}}K_p)(X_{\mathbf{P}} + Y_{\mathbf{P}}K_p)^{-1}. \quad (4.4)$$

De facto,

$$\begin{aligned} K_p = (X_{\mathbf{C}} - S_pY_{\mathbf{P}})^{-1}(Y_{\mathbf{C}} + S_pX_{\mathbf{P}}) &\Leftrightarrow (X_{\mathbf{C}} - S_pY_{\mathbf{P}})K_p = Y_{\mathbf{C}} + S_pX_{\mathbf{P}} \\ &\Leftrightarrow S_pX_{\mathbf{P}} + S_pY_{\mathbf{P}}K_p = -Y_{\mathbf{C}} + X_{\mathbf{C}}K_p \\ &\Leftrightarrow S_p = (-Y_{\mathbf{C}} + X_{\mathbf{C}}K_p)(X_{\mathbf{P}} + Y_{\mathbf{P}}K_p)^{-1}. \end{aligned}$$

Com base em realizações adequadas para as matrizes de transferência S_p vai-se construir realizações especiais para cada controlador $K_p \in \mathcal{K}$. Para tal considera-se factorizações coprimas esquerdas particulares tanto para o processo como para o controlador, construídas como a seguir se indica. Antes de apresentar a construção pretendida, é necessário introduzir um resultado auxiliar.

Lema 4.2.1. [HM02] *Dadas duas matrizes de transferência $H_{\mathbf{P}}$ e K , com $H_{\mathbf{P}}$ estritamente própria, tais que K estabiliza $H_{\mathbf{P}}$, existem matrizes A_E, B_E, C_E, D_E, F_E e G_E (com dimensões apropriadas) tais que A_E é uma matriz estável, e $\{A_E + D_EC_E, B_E, C_E\}$ e $\{A_E - B_EF_E, D_E - B_EG_E, F_E, G_E\}$ são realizações estabilizáveis e detectáveis de $H_{\mathbf{P}}$ e K , respectivamente.*

Demonstração. Sejam $\{A, B, C\}$ e $\{F, G, H\}$ realizações minimais de $H_{\mathbf{P}}$ e K respectivamente. Uma vez que $\{A, B, C\}$ e $\{F, G, H\}$ são realizações minimais, então os pares (C, A) e (H, F) são observáveis e consequentemente detectáveis. Portanto existem matrizes X, Y tais que $A + XC$ e $F + YH$ são estáveis.

Defina-se

$$A_E := \begin{pmatrix} A + XC & 0 \\ 0 & F + YH \end{pmatrix}, \quad B_E := \begin{pmatrix} B \\ -Y \end{pmatrix}, \quad C_E := \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_E := \begin{pmatrix} -X \\ -G - YJ \end{pmatrix}, \quad F_E := \begin{pmatrix} 0 & -H \end{pmatrix}, \quad G_E = J.$$

A matriz A_E é obviamente estável. Além disso, e por definição de realização, tem-se

$$\begin{aligned} & C_E(sI - (A_E + D_EC_E))^{-1}B_E = \\ &= \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \left(sI - \begin{pmatrix} A + XC & 0 \\ 0 & F + YH \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -X \\ -G - YJ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} B \\ -Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \left(sI - \begin{pmatrix} A + XC & 0 \\ 0 & F + YH \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -XC & 0 \\ -GC - YJC & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} B \\ -Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \left(sI - \begin{pmatrix} A & 0 \\ -GC - YJC & F + YH \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} B \\ -Y \end{pmatrix} \\ &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= H_{\mathbf{P}}(s), \end{aligned}$$

ou seja, $\{A_E + D_EC_E, B_E, C_E\}$ é uma realização de $H_{\mathbf{P}}(s)$.

Por outro lado

$$F_E(sI - (A_E - B_EF_E))^{-1}(D_E - B_EG_E) + G_E =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & -H \end{pmatrix} \left(sI - \begin{pmatrix} A+XC & 0 \\ 0 & F+YH \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ -Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -H \end{pmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} -X \\ -G-YJ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B \\ -Y \end{pmatrix} J \right) + J \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -H \end{pmatrix} \left(sI - \begin{pmatrix} A+XC & 0 \\ 0 & F+YH \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -BH \\ 0 & YH \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} -X-BJ \\ -G \end{pmatrix} + J \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -H \end{pmatrix} \left(sI - \begin{pmatrix} A+XC & BH \\ 0 & F \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} -X-BJ \\ -G \end{pmatrix} + J \\
&= H(sI - F)^{-1}G + J \\
&= K(s),
\end{aligned}$$

isto é, $\{A_E - B_E F_E, D_E - B_E G_E, F_E, G_E\}$ é uma realização de $K(s)$.

A realização $\{A_E + D_E C_E, B_E, C_E\}$ é detectável, pois, pela Definição 2.4.4, existe $M = -D_E$ tal que $A_E + D_E C_E + M C_E = A_E$ é estável. Analogamente, considerando $M = B_E$ tem-se que $A_E - B_E F_E + M F_E = A_E$ é estável, logo a realização $\{A_E - B_E F_E, D_E - B_E G_E, F_E, G_E\}$ também é detectável.

A realização $\{A_E + D_E C_E, B_E, C_E\}$ é estabilizável, pois, pela Definição 2.4.1, existe $L = \begin{pmatrix} -JC & H \end{pmatrix}$ tal que $A_E + D_E C_E + B_E L$ é estável. De facto,

$$\begin{aligned}
A_E + D_E C_E + B_E L &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ -GC - YJC & F + YH \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ -Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -JC & H \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A & 0 \\ -GC - YJC & F + YH \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -BJC & BH \\ YJC & -YH \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A - BJC & BH \\ -GC & F \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

a qual é uma matriz estável, já que K estabiliza $H_{\mathbf{P}}$.

Analogamente, considerando $L = C_E$ obtém-se novamente

$$\begin{aligned}
 A_E - B_E F_E + (D_E - B_E G_E)L &= \begin{pmatrix} A + XC & BH \\ 0 & F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -X - BJ \\ -G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A + XC & BH \\ 0 & F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -XC - BJC & 0 \\ -GC & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A - BJC & BH \\ -GC & F \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

que é uma matriz estável. Portanto, $A_E - B_E F_E + (D_E - B_E G_E)L$ é estável e a realização $\{A_E - B_E F_E, D_E - B_E G_E, F_E, G_E\}$ também é estabilizável. \square

Sejam então, $\{A_E + D_E C_E, B_E, C_E\}$ e $\{A_E - B_E F_E, D_E - B_E G_E, F_E, G_E\}$ realizações estabilizáveis e detectáveis de $H_{\mathbf{P}}$ e K^* , respectivamente, com A_E estável. De acordo com [Vid85, pág. 83] verifica-se que

$$\begin{cases} X_{\mathbf{P}} = I - C_E(sI - A_E)^{-1}D_E \\ Y_{\mathbf{P}} = C_E(sI - A_E)^{-1}B_E \end{cases} \quad (4.5)$$

define uma FCE de $H_{\mathbf{P}}$, enquanto que

$$\begin{cases} X_{\mathbf{C}} = I + F_E(sI - A_E)^{-1}B_E \\ Y_{\mathbf{C}} = F_E(sI - A_E)^{-1}D_E + G_E \end{cases} \quad (4.6)$$

define uma FCE de K^* .

No que se segue supõe-se que $X_{\mathbf{P}}, Y_{\mathbf{P}}, X_{\mathbf{C}}, Y_{\mathbf{C}}$ são dados por (4.5) e (4.6), respectivamente, e que S_p é a correspondente função de transferência dada por (4.4).

Definam-se então duas novas variáveis v e e através de

$$\begin{cases} v = X_{\mathbf{C}}u_{\mathbf{C}} - Y_{\mathbf{C}}e_T \\ e = Y_{\mathbf{P}}u_{\mathbf{C}} + X_{\mathbf{P}}e_T. \end{cases} \quad (4.7)$$

Note-se que, neste caso:

$$v = S_p e.$$

De facto, uma vez que $u_{\mathbf{C}} = K_p e_T$, tem-se

$$v = X_{\mathbf{C}} K_p e_T - Y_{\mathbf{C}} e_T = (X_{\mathbf{C}} K_p - Y_{\mathbf{C}}) e_T \quad (4.8)$$

e, de forma análoga,

$$e = (Y_{\mathbf{P}} K_p + X_{\mathbf{P}}) e_T,$$

donde

$$e_T = (Y_{\mathbf{P}} K_p + X_{\mathbf{P}})^{-1} e \quad (4.9)$$

e portanto, substituindo (4.9) em (4.8) e tendo em conta (4.4), vem

$$v = (-Y_{\mathbf{C}} + X_{\mathbf{C}} K_p)(X_{\mathbf{P}} + Y_{\mathbf{P}} K_p)^{-1} e = S_p e.$$

Considere-se ainda a variável \bar{u} definida por $\bar{u} = v - u_{\mathbf{C}}$. É óbvio que, de (4.7), decorre que $\bar{u} = (X_{\mathbf{C}} - I)u_{\mathbf{C}} - Y_{\mathbf{C}} e_T$.

Facilmente se verifica que a partir de (4.5) e (4.6) que

$$\left\{ A_E, \begin{bmatrix} B_E & -D_E \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} F_E \\ C_E \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -G_E \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\}$$

constitui uma realização para a matriz de transferência $\begin{pmatrix} X_{\mathbf{C}} - I & -Y_{\mathbf{C}} \\ Y_{\mathbf{P}} & X_{\mathbf{P}} \end{pmatrix}$ de $\begin{pmatrix} u_{\mathbf{C}} \\ e_T \end{pmatrix}$

para $\begin{pmatrix} \bar{u} \\ e \end{pmatrix}$, i.e.,

$$\begin{pmatrix} X_{\mathbf{C}} - I & -Y_{\mathbf{C}} \\ Y_{\mathbf{P}} & X_{\mathbf{P}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_E \\ C_E \end{pmatrix} (sI - A_E)^{-1} \begin{pmatrix} B_E & -D_E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -G_E \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Atendendo a que $u_{\mathbf{C}} = -\bar{u} + v = -F_E x_E + G_E e_T + v$, obtemos então as seguintes equações

$$\begin{cases} \dot{x}_E = A_E x_E + B_E u_{\mathbf{C}} - D_E e_T \\ e = C_E x_E + e_T \\ u_{\mathbf{C}} = -F_E x_E + G_E e_T + v. \end{cases} \quad (4.11)$$

Por sua vez, realizando S_p através de $\{\bar{A}_p, \bar{B}_p, \bar{C}_p, \bar{D}_p\}$, com \bar{A}_p estável, vem que

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}_p \bar{x} + \bar{B}_p e \\ v = \bar{C}_p \bar{x} + \bar{D}_p e. \end{cases} \quad (4.12)$$

Juntando as equações (4.11) e (4.12) obtém-se uma realização de espaço de estados para o controlador K_p , dada por

$$\begin{cases} \dot{x}_C = F_p x_C + G_p e_T \\ u_C = H_p x_C + J_p e_T, \end{cases} \quad (4.13)$$

com $x_C = \begin{pmatrix} x_E \\ \bar{x} \end{pmatrix}$,

$$F_p = \begin{pmatrix} A_E - B_E F_E + B_E \bar{D}_p C_E & B_E \bar{C}_p \\ \bar{B}_p C_E & \bar{A}_p \end{pmatrix}, \quad G_p = \begin{pmatrix} -D_E + B_E(\bar{D}_p + G_E) \\ \bar{B}_p \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

$$H_p = \begin{pmatrix} -F_E + \bar{D}_p C_E & \bar{C}_p \end{pmatrix} \quad e \quad J_p = \bar{D}_p + G_E. \quad (4.15)$$

Como adiante se verá, através da escolha de realizações $\{\bar{A}_p, \bar{B}_p, \bar{C}_p, \bar{D}_p\}$, para cada S_p , que possuem uma FLQC, é possível obter realizações para cada controlador $K_p \in \mathcal{K}$ para as quais o sistema em malha fechada possui também uma FLQC sendo por isso estável.

A existência de realizações $\{\bar{A}_p, \bar{B}_p, \bar{C}_p, \bar{D}_p\}$ nas condições mencionadas é garantida pelo seguinte resultado.

Lema 4.2.2. *Considere-se uma qualquer família finita de matrizes de transferência estáveis $\mathcal{S} = \{S_p : p \in \mathcal{P}\}$ com grau de McMillan não maior do que n e uma qualquer matriz simétrica definida positiva Q , $n \times n$, então existem realizações estáveis de dimensão n , $\{\bar{A}_p, \bar{B}_p, \bar{C}_p, \bar{D}_p\}$ para cada $S_p \in \mathcal{S}$ tal que se verifica*

$$Q\bar{A}_p + \bar{A}_p^T Q < 0, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Demonstração. Para cada $p \in \mathcal{P}$, seja $\{\tilde{A}_p, \tilde{B}_p, \tilde{C}_p, \tilde{D}_p\}$ uma qualquer realização de S_p de dimensão n , com \tilde{A}_p estável.

Uma vez que cada \tilde{A}_p , $p \in \mathcal{P}$, é estável, pelo Teorema 2.2.5 a família de equações de Lyapunov

$$Q_p \tilde{A}_p + \tilde{A}_p^T Q_p = -I, p \in \mathcal{P} \quad (4.16)$$

possui soluções simétricas e definidas positivas Q_p . Tais soluções podem ser escritas como

$$Q_p = N_p^T N_p,$$

com N_p quadrada e não singular.

Dada uma matriz definida positiva $Q = N^T N \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com N não singular, defina-se

$$\bar{A}_p = N^{-1} N_p \tilde{A}_p N_p^{-1} N, \quad \bar{B}_p = N^{-1} N_p \tilde{B}_p, \quad \bar{C}_p = \tilde{C}_p N_p^{-1} \quad e \quad \bar{D}_p = \tilde{D}_p. \quad (4.17)$$

Vamos ver que as matrizes \bar{A}_p estão nas condições pretendidas.

Como o modelo $\{\bar{A}_p, \bar{B}_p, \bar{C}_p, \bar{D}_p\}$ é obtido de $\{\tilde{A}_p, \tilde{B}_p, \tilde{C}_p, \tilde{D}_p\}$ por uma transformação de semelhança, $\{\bar{A}_p, \bar{B}_p, \bar{C}_p, \bar{D}_p\}$ é também uma realização estável de S_p .

Além disso, de (4.16) e de (4.17) conclui-se que

$$(N^{-1} N_p)^T (Q \bar{A}_p + \bar{A}_p^T Q) N^{-1} N_p = -I. \quad (4.18)$$

De facto, de (4.17) verifica-se que

$$\bar{A}_p = N^{-1} N_p \tilde{A}_p N_p^{-1} N \Leftrightarrow \tilde{A}_p = N_p^{-1} N \bar{A}_p N^{-1} N_p,$$

e substituindo em (4.16), \tilde{A}_p e Q_p pelas respectivas expressões tem-se

$$\begin{aligned} & N_p^T N_p N_p^{-1} N \bar{A}_p N^{-1} N_p + (N_p^{-1} N \bar{A}_p N^{-1} N_p)^T N_p^T N_p = -I \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow N_p^T N \bar{A}_p N^{-1} N_p + N_p^T (N^{-1})^T \bar{A}_p^T N^T (N_p^{-1})^T N_p^T N_p = -I \\ & \Leftrightarrow N_p^T N \bar{A}_p N^{-1} N_p + N_p^T (N^{-1})^T \bar{A}_p^T N^T N_p = -I \\ & \Leftrightarrow N_p^T (N^{-1})^T N^T N \bar{A}_p N^{-1} N_p + N_p^T (N^{-1})^T \bar{A}_p^T N^T N N^{-1} N_p = -I \\ & \Leftrightarrow (N^{-1} N_p)^T Q \bar{A}_p (N^{-1} N_p) + (N^{-1} N_p)^T \bar{A}_p^T Q (N^{-1} N_p) = -I \\ & \Leftrightarrow (N^{-1} N_p)^T (Q \bar{A}_p + \bar{A}_p^T Q) N^{-1} N_p = -I. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (4.18) à esquerda por $(N_p^{-1}N)^T$ e à direita por $N_p^{-1}N$, tem-se

$$\begin{aligned} (N_p^{-1}N)^T(N_p^{-1}N)^T(Q\bar{A}_p + \bar{A}_p^T Q)(N_p^{-1}N_p)(N_p^{-1}N) &= -(N_p^{-1}N)^T(N_p^{-1}N) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Q\bar{A}_p + \bar{A}_p^T Q &= -(N_p^{-1}N)^T(N_p^{-1}N) < 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.2.3. *Dados um processo $H_{\mathbf{P}}$, um banco de controladores estabilizantes $\mathcal{K} = \{K_p : p \in \mathcal{P}\}$ e um controlador estabilizante de $H_{\mathbf{P}}$, K^* , considerem-se as realizações $\{A_E + D_E C_E, B_E, C_E\}$ para $H_{\mathbf{P}}$ e $\{A_E - B_E F_E, D_E - B_E G_E, F_E, G_E\}$ para K^* nas condições do Lema 4.2.1, bem como uma família de realizações $\{\{\bar{A}_p, \bar{B}_p, \bar{C}_p, \bar{D}_p\}, p \in \mathcal{P}\}$ com FLQC para as matrizes de transferência S_p , $p \in \mathcal{P}$, definidas por (4.4). Considerem-se ainda as realizações $\{F_p, G_p, H_p, J_p\}$ para os controladores $K_p \in \mathcal{K}$, dadas por (4.14) e (4.15). Então o correspondente sistema comutado em malha fechada (4.1) possui uma FLQC.*

Demonstração. Substituindo F_p , G_p , H_p , J_p , dados por (4.14) e (4.15), $A = A_E + D_E C_E$, $B = B_E$ e $C = C_E$ na matriz do sistema de malha fechada (4.1)

$$A_p := \begin{pmatrix} A - B J_p C & B H_p \\ -G_p C & F_p \end{pmatrix}, p \in \mathcal{P},$$

obtém-se

$$A_p := \begin{pmatrix} A_E + D_E C_E - B_E(\bar{D}_p + G_E)C_E & -B_E F_E + B_E \bar{D}_p C_E & B_E \bar{C}_p \\ D_E C_E - B_E(\bar{D}_p + G_E)C_E & A_E - B_E F_E + B_E \bar{D}_p C_E & B_E \bar{C}_p \\ -\bar{B}_p C_E & \bar{B}_p C_E & \bar{A}_p \end{pmatrix}, p \in \mathcal{P}.$$

$$\text{Definindo } T = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ -I & I & 0 \end{pmatrix} \text{ tem-se que } T^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ I & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} \text{ e portanto,}$$

$$T A_p T^{-1} := \begin{pmatrix} A_E + D_E C_E - B_E F_E - B_E G_E C_E & B_E \bar{C}_p & -B_E F_E + B_E \bar{D}_p C_E \\ 0 & \bar{A}_p & \bar{B}_p C_E \\ 0 & 0 & A_E \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

$p \in \mathcal{P}$.

Uma vez que K^* estabiliza $H_{\mathbf{P}}$ e $\{A_E + D_EC_E, B_E, C_E\}$ e $\{A_E - B_EF_E, D_E - B_EG_E, F_E, G_E\}$ são realizações estabilizáveis e detectáveis de $H_{\mathbf{P}}$ e K^* respectivamente, pela Definição 4.1.1, a matriz do sistema em malha fechada

$$\bar{A}_E := \begin{pmatrix} A_E + D_EC_E - B_EG_EC_E & B_EF_E \\ -(D_E - B_EG_E)C_E & A_E - B_EF_E \end{pmatrix},$$

é estável.

Definindo $T_E = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix}$, $T_E^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix}$, obtém-se

$$T_E \bar{A}_E T_E^{-1} := \begin{pmatrix} A_E + D_EC_E - B_EF_E - B_EG_EC_E & B_EF_E \\ 0 & A_E \end{pmatrix},$$

que também é estável.

Assim, pode concluir-se que também a matriz $A_E + D_EC_E - B_EF_E - B_EG_EC_E$ é estável. Portanto, uma vez que A_E foi inicialmente tomada estável, pelo Teorema 2.2.5, existem matrizes simétricas definidas positivas Q_1 e Q_2 tais que

$$Q_1(A_E + D_EC_E - B_EF_E - B_EG_EC_E) + (A_E + D_EC_E - B_EF_E - B_EG_EC_E)^T Q_1 = -I \quad (4.20)$$

e

$$Q_2 A_E + A_E^T Q_2 = -I \quad (4.21)$$

Seja \bar{Q} a matriz simétrica definida positiva associada a uma FLQC para as realizações $\{\{\bar{A}_p, \bar{B}_p, \bar{C}_p, \bar{D}_p\}, p \in \mathcal{P}\}$, então pela Proposição 2.2.4

$$\bar{Q} \bar{A}_p + \bar{A}_p^T \bar{Q} < 0, \quad p \in \mathcal{P}.$$

Definindo

$$P_p = -\bar{Q} \bar{A}_p - \bar{A}_p^T \bar{Q}, \quad p \in \mathcal{P}, \quad (4.22)$$

verifica-se que P_p é simétrica e definida positiva. Além disso, existe uma constante positiva, ϵ , suficientemente pequena, tal que

$$P_p - \epsilon \bar{Q} \bar{B}_p C_E C_E^T \bar{B}_p^T \bar{Q} > 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}. \quad (4.23)$$

De facto, considere-se $\lambda_{\min}(P_p)$, $\lambda_{\max}(P_p)$ o menor e o maior valor próprio da matriz P_p , respectivamente, e $\lambda_{\min}(M^T M)$, $\lambda_{\max}(M^T M)$ o menor e o maior valor próprio da matriz $M^T M$, com $M = C_E^T \bar{B}_p^T \bar{Q}$, respectivamente. Sabe-se que,

$$\lambda_{\min}(P_p)I < P_p < \lambda_{\max}(P_p)I,$$

$$\lambda_{\min}(M^T M)I < M^T M < \lambda_{\max}(M^T M)I.$$

Portanto, para $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, tal que $\epsilon \lambda_{\max}(M^T M) < \lambda_{\min}(P_p)$, obtemos

$$\epsilon M^T M < \epsilon \lambda_{\max}(M^T M)I < \lambda_{\min}(P_p)I < P_p,$$

i.e.,

$$\epsilon M^T M < P_p.$$

Logo, $P_p - \epsilon M^T M > 0$.

Pelo Lema A.0.2¹, a equação (4.23) garante que

$$R = \epsilon \begin{pmatrix} P_p & -\bar{Q} \bar{B}_p C_E \\ -C_E^T \bar{B}_p^T \bar{Q} & \epsilon^{-1} I \end{pmatrix}, p \in \mathcal{P} \quad (4.24)$$

é também definida positiva.

Seja

$$Q = T^T \begin{pmatrix} \epsilon_1 Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon \bar{Q} & 0 \\ 0 & 0 & Q_2 \end{pmatrix} T, \quad (4.25)$$

com

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} \left(\max_{p \in \mathcal{P}} \|Q_1 W_p R^{-1} W_p^T Q_1\| \right)^{-1}, \quad (4.26)$$

onde, para cada $p \in \mathcal{P}$

$$W_p = \begin{pmatrix} B_E \bar{C}_p & -B_E F_E + B_E \bar{D}_p C_E \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Por (4.19) e (4.25), tem-se

$$Q A_p + A_p^T Q =$$

¹Ver Apêndice

$$= T^T \begin{pmatrix} \epsilon_1 [Q_1(A_E + D_E C_E - B_E F_E - B_E G_E C_E) \\ + (A_E + D_E C_E - B_E F_E - B_E G_E C_E)^T Q_1] & \epsilon_1 Q_1 B_E \bar{C}_p & \epsilon_1 Q_1 (-B_E F_E + B_E \bar{D}_p C_E) \\ \epsilon_1 (B_E \bar{C}_p)^T Q_1 & \epsilon (\bar{Q} \bar{A}_p + \bar{A}_p^T \bar{Q}) & \epsilon \bar{Q} \bar{B}_p C_E \\ \epsilon_1 (-B_E F_E + B_E \bar{D}_p C_E)^T Q_1 & \epsilon C_E^T \bar{B}_p^T \bar{Q} & Q_2 A_E + A_E^T Q_2 \end{pmatrix} T,$$

enquanto que de (4.20), (4.21) e (4.22) se conclui que

$$Q A_p + A_p^T Q = T^T \begin{pmatrix} \epsilon_1 (-I) & \epsilon_1 Q_1 B_E \bar{C}_p & \epsilon_1 Q_1 (-B_E F_E + B_E \bar{D}_p C_E) \\ \epsilon_1 (B_E \bar{C}_p)^T Q_1 & \epsilon (-P_p) & \epsilon \bar{Q} \bar{B}_p C_E \\ \epsilon_1 (-B_E F_E + B_E \bar{D}_p C_E)^T Q_1 & \epsilon C_E^T \bar{B}_p^T \bar{Q} & -I \end{pmatrix} T.$$

Usando (4.24) e (4.27) obtém-se

$$Q A_p + A_p^T Q = T^T \begin{pmatrix} \epsilon_1 (-I) & \epsilon_1 Q_1 W_p \\ \epsilon_1 W_p^T Q_1 & -R \end{pmatrix} T,$$

e portanto

$$Q A_p + A_p^T Q = -\epsilon_1 T^T \begin{pmatrix} I & -Q_1 W_p \\ -W_p^T Q_1 & \epsilon_1^{-1} R \end{pmatrix} T.$$

Por outro lado, por (4.26),

$$I - \epsilon_1 Q_1 W_p R^{-1} W_p^T Q_1 > 0,$$

para cada $p \in \mathcal{P}$. De facto, considerem-se $R^{-1} = \tilde{R}^{-1T} \tilde{R}^{-1}$ e $\lambda_{\min}(Z_p Z_p^T)$, $\lambda_{\max}(Z_p Z_p^T)$ o menor e o maior valor próprio da matriz $Z_p Z_p^T$, com $Z_p = Q_1 W_p \tilde{R}^{-1T}$, respectivamente. Então,

$$\lambda_{\min}(Z_p Z_p^T) I < Z_p Z_p^T < \lambda_{\max}(Z_p Z_p^T) I.$$

Portanto, para $\epsilon_1 = \frac{1}{2} (\max_{p \in \mathcal{P}} \|Q_1 W_p R^{-1} W_p^T Q_1\|)^{-1}$, temos

$$\begin{aligned} \epsilon_1 Z_p Z_p^T &< \epsilon_1 \lambda_{\max}(Z_p Z_p^T) I \\ &= \frac{1}{2} (\max_{p \in \mathcal{P}} \|Z_p Z_p^T\|)^{-1} \lambda_{\max}(Z_p Z_p^T) I \\ &< \frac{1}{2} (\lambda_{\max}(Z_p Z_p^T))^{-1} \lambda_{\max}(Z_p Z_p^T) I = \frac{1}{2} I < I \end{aligned}$$

i.e.,

$$\epsilon_1 Z_p Z_p^T < I.$$

Logo, $I - \epsilon_1 Z_p Z_p^T > 0$.

Uma vez que, $I - \epsilon_1 Q_1 W_p R^{-1} W_p^T Q_1 > 0$, para cada $p \in \mathcal{P}$, pelo Lema A.0.2 tem-se

$$\begin{pmatrix} I & -Q_1 W_p \\ -W_p^T Q_1 & \epsilon_1^{-1} R \end{pmatrix} > 0, p \in \mathcal{P}.$$

Logo, $Q A_p + A_p^T Q < 0$, $p \in \mathcal{P}$ e pela proposição 2.2.4 existe uma FLQC para o sistema comutado em malha fechada. \square

Deste Teorema e pelo Teorema 3.2.4 imediatamente se obtém o resultado pretendido sobre a estabilidade do sistema em malha fechada.

Corolário 4.2.4. *Nas condições do teorema anterior o sistema de controlo comutado é estável.*

4.3 Algoritmo

Apresenta-se a seguir um algoritmo para a obtenção de um sistema de controlo comutado estável, com base nos resultados da secção anterior.

Dados do problema:

- Processo \mathbf{P} com matriz de transferência $H_{\mathbf{P}}$ de dimensão $r \times m$.
- Banco de controladores estabilizantes \mathcal{K} com matrizes de transferência K_p , de dimensão $m \times r$.

Passos para obter um esquema de controlo comutado estável:

Passo 1: Tomar um controlador $K^* \in \mathcal{K}$.

Passo 2: Considerar realizações minimais $\{A, B, C\}$ e $\{F, G, H\}$ para H_p e K^* respectivamente e obter X e Y tais que $A + XC$ e $F + YH$ sejam estáveis.

Passo 3: Definir

$$A_E := \begin{pmatrix} A + XC & 0 \\ 0 & F + YH \end{pmatrix},$$

$$B_E := \begin{pmatrix} B \\ -Y \end{pmatrix},$$

$$C_E := \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_E := \begin{pmatrix} -X \\ -G - YJ \end{pmatrix},$$

$$F_E := \begin{pmatrix} 0 & -H \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$G_E = J.$$

Passo 4: Para cada controlador K_p do banco, definir a função de transferência

$$S_p = (-Y_C + X_C K_p)(X_P + Y_P K_p)^{-1},$$

com X_C , Y_C , X_P e Y_P dadas por (4.5) e (4.6).

Passo 5: Obter realizações estáveis $\{\bar{A}_p, \bar{B}_p, \bar{C}_p, \bar{D}_p\}$ para cada S_p possuindo uma FLQC, isto é:

5.1 Tomar qualquer realização $\{\tilde{A}_p, \tilde{B}_p, \tilde{C}_p, \tilde{D}_p\}$ para S_p com \tilde{A}_p estável.

5.2 Tomar para cada p , Q_p simétrica e definida positiva tal que

$$Q_p \tilde{A}_p + \tilde{A}_p^T Q_p = -I.$$

5.3 Determinar N_p tal que $Q_p = N_p^T N_p$.

5.4 Definir

$$\bar{A}_p = N_p \tilde{A}_p N_p^{-1},$$

$$\bar{B}_p = N_p \tilde{B}_p,$$

$$\bar{C}_p = \tilde{C}_p N_p^{-1} \text{ e}$$

$$\bar{D}_p = \tilde{D}_p.$$

Note-se que isto corresponde a tomar a matriz Q do Lema 4.2.2 igual à identidade.

Passo 6: **6.1** Definir para cada controlador K_p a realização $\{F_p, G_p, H_p, J_p\}$ dada por

$$F_p = \begin{pmatrix} A_E - B_E F_E + B_E \bar{D}_p C_E & B_E \bar{C}_p \\ \bar{B}_p C_E & \bar{A}_p \end{pmatrix}, \quad G_p = \begin{pmatrix} -D_E + B_E(\bar{D}_p + G_E) \\ \bar{B}_p \end{pmatrix},$$

$$H_p = \begin{pmatrix} -F_E + \bar{D}_p C_E & \bar{C}_p \end{pmatrix} \quad e \quad J_p = \bar{D}_p + G_E.$$

6.2 Considerar a realização $\{A_E + D_E C_E, B_E, C_E\}$ para a matriz de transferência do processo, H_p

Passo 7: Fazer a comutação com base nesta descrição do sistema.

Capítulo 5

Conclusão

O estudo realizado neste trabalho foi motivado pelo facto de um sistema de controlo comutado com base num banco \mathcal{K} de controladores poder ser instável apesar de todos os controladores do banco estabilizarem o processo \mathbf{P} a controlar.

Numa primeira fase deste trabalho, estabeleceu-se condições que garantem a estabilidade de um sistema linear comutado (na ausência de controlo). Concluiu-se que a existência de uma Função de Lyapunov Quadrática Comum (FLQC) implica a estabilidade de um sistema comutado. Consequentemente estudou-se condições que garantem a existência de FLQC, tendo-se nomeadamente demonstrado que tal função existe para sistemas com matrizes simultaneamente triangularizáveis. Foram ainda estabelecidas condições para a triangularização simultânea de matrizes com base nas propriedades da álgebra de Lie por elas gerada.

Numa segunda fase, considerou-se um sistema de controlo comutado com base num banco de controladores estabilizantes, o que garante a estabilidade em malha fechada de cada sistema individual. Como já foi referido este facto não é suficiente para garantir a estabilidade do sistema de controlo comutado. No entanto, mostrou-se que é possível garantir essa estabilidade através de uma escolha de realizações adequadas para os controladores do banco. Para esse efeito considerou-se factorizações coprimas esquerdas particulares tanto para o processo como para o controlador. Este processo

foi esquematizado num algoritmo apresentado no final do Capítulo 4.

Era ainda objectivo deste trabalho a realização de simulações com base no algoritmo apresentado. Por falta de tempo, não foi possível concretizar este objectivo. No entanto, pretende-se levar a cabo esta tarefa em trabalho posterior.

A

Apêndice

Lema A.0.1. *Definam-se: $[A_p]_k$ como sendo a matriz formada pelas linhas 1 a k e as colunas 1 a k de A_p , M_p^{ik} como sendo o menor complementar do elemento ik da matriz $[A_p]_k$ e Δ_k^p como sendo o menor principal de ordem k da matriz $-\tilde{A}_p^* \tilde{P} - \tilde{P} \tilde{A}_p$.*

Tome-se $\tilde{P} = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$, com $p_i \in \mathbb{R}$, tais que

$$p_1 > 0 \quad (\text{A.1})$$

e

$$p_{k+1}^1 > \max_{p \in \mathcal{P}} \frac{\sum_{i=1}^k (-1)^{i+k+1} (\tilde{A}_p)_{i,k+1} M_p^{ik+1}}{2\Re(\tilde{A}_p)_{k+1,k+1} \Delta_k^p}, k = 1, 2, \dots \quad (\text{A.2})$$

então todos os menores principais de $-\tilde{A}_p^ \tilde{P} - \tilde{P} \tilde{A}_p$ são positivos.*

Demonstração. Uma vez que

$$-\tilde{A}_p^* \tilde{P} - \tilde{P} \tilde{A}_p = \begin{pmatrix} -2p_1 \Re(\tilde{A}_p)_{11} & -p_1(\tilde{A}_p)_{12} & \dots & -p_1(\tilde{A}_p)_{1n} \\ -p_1 \overline{(\tilde{A}_p)_{12}} & -2p_2 \Re(\tilde{A}_p)_{22} & \dots & -p_2(\tilde{A}_p)_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_1 \overline{(\tilde{A}_p)_{1n}} & -p_2 \overline{(\tilde{A}_p)_{2n}} & \dots & -2p_n \Re(\tilde{A}_p)_{nn} \end{pmatrix},$$

desenvolvendo Δ_{k+1}^p pela sua última coluna, verifica-se que

$$\Delta_{k+1}^p = -2\Re(\tilde{A}_p)_{k+1,k+1} \Delta_k^p p_{k+1} + \sum_{i=1}^k (-1)^{i+k+1} (\tilde{A}_p)_{i,k+1} M_p^{ik+1} \quad (\text{A.3})$$

¹Note-se que p_{k+1} está bem definida, pois Δ_k^p só depende de p_1, \dots, p_k .

Use-se agora indução sobre k para provar que a escolha de p 's definidos por (A.1) e (A.2) origina menores principais, da matriz $-\tilde{A}_p^* \tilde{P} - \tilde{P} \tilde{A}_p$, positivos.

Para $k = 1$, $\Delta_1^p = -2p_1 \Re(\tilde{A}_p)_{11} > 0$, pois $p_1 > 0$ e $\Re(\tilde{A}_p)_{11} < 0$ pela estabilidade das matrizes triangulares \tilde{A}_p .

Supondo que $\Delta_k^p > 0$, verifique-se que, com a escolha de p 's definidos por (A.1) e (A.2), $\Delta_{k+1}^p > 0$.

Atendendo a (A.3) e a (A.2):

$$\begin{aligned} \Delta_{k+1}^p &= -2\Re(\tilde{A}_p)_{k+1,k+1} \Delta_k^p p_{k+1} + \sum_{i=1}^k (-1)^{i+k+1} (\tilde{A}_p)_{i,k+1} M_p^{ik+1} \\ &> -2\Re(\tilde{A}_p)_{k+1,k+1} \Delta_k^p \frac{\sum_{i=1}^k (-1)^{i+k+1} (\tilde{A}_p)_{i,k+1} M_p^{ik+1}}{2\Re(\tilde{A}_p)_{k+1,k+1} \Delta_k^p} + \sum_{i=1}^k (-1)^{i+k+1} (\tilde{A}_p)_{i,k+1} M_p^{ik+1} = 0, \end{aligned}$$

como se pretendia.

Portanto, fica provado por indução que a escolha de p 's definidos por (A.1) e (A.2) dá origem a uma matriz diagonal P que torna os menores principais da matriz $-\tilde{A}_p^* \tilde{P} - \tilde{P} \tilde{A}_p$ positivos. \square

Lema A.0.2. *Sejam $\tilde{R}^T \tilde{R} = R > 0$ e $Q - SR^{-1}S^T > 0$. Então,*

$$\begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} > 0.$$

Demonstração. Considere-se

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{R} \end{pmatrix} \text{ e } N = \begin{pmatrix} Q & S\tilde{R}^{-1} \\ (\tilde{R}^T)^{-1}S^T & I \end{pmatrix}.$$

$$M^T N M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{R}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & S\tilde{R}^{-1} \\ (\tilde{R}^T)^{-1}S^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Considere-se $U = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -(\tilde{R}^T)^{-1}S^T & I \end{pmatrix}$. Assim,

$$\begin{aligned} U^T N U &= \begin{pmatrix} I & -(\tilde{R}^T)^{-1}S^T \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & S\tilde{R}^{-1} \\ (\tilde{R}^T)^{-1}S^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -(\tilde{R}^T)^{-1}S^T & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q - SR^{-1}S^T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$N = (U^{-1})^T \begin{pmatrix} Q - SR^{-1}S^T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U^{-1}$$

Deste modo, pela equação (A.4), tem-se

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} &= M^T (U^{-1})^T \begin{pmatrix} Q - SR^{-1}S^T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U^{-1} M \\ &= \tilde{M}^T \begin{pmatrix} Q - SR^{-1}S^T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tilde{M}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{M} = U^{-1}M$ é não singular.

Como $Q - SR^{-1}S^T > 0$, então $\begin{pmatrix} Q - SR^{-1}S^T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} > 0$ e

$$\widetilde{M}^T \begin{pmatrix} Q - SR^{-1}S^T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \widetilde{M} > 0.$$

Logo, se $R > 0$ e $Q - SR^{-1}S^T > 0$. Então,

$$\begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} > 0.$$

□

Referências

- [AL01] Andrei A. Agrachev and Daniel Liberzon. Lie-algebraic stability criteria for switched systems. *SIAM Journal Control Optimization*, 40(1):253–269, 2001.
- [BGFB94] S. Boyd, L. E. Ghaoi, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [Bra98] Michael S. Branicky. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hibrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4):475–482, Abril 1998.
- [DBPL00] Raymond A. Decarlo, Michael S. Branicky, Stefan Pettersson, and Bengt Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hibrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 88(7):1069–1082, Julho 2000.
- [HM96] João P. Hespanha and A. Stephen Morse. Supervisory control of families of stabilizing controllers. In *Presented at 12th Int. Symposium on the Mathematical theory of Networks and Systems*. S. Louis, MO, Julho 1996.
- [HM02] João P. Hespanha and A. Stephen Morse. Switching between stabilizing controllers. *Automatica*, 38(11):1905–1917, Novembro 2002.
- [Hum72] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Springer-Verlag, 1972.

- [Laf78] Thomas J. Laffey. Simultaneous triangularization of matrices - Low rank and the nonderogatory case. *Linear and Multilinear Algebra*, 6(1):269–305, Julho 1978.
- [LHM99] D. Liberzon, J. P. Hespanha, and A. S. Morse. Stability of switched systems: a Lie-algebraic condition. *Systems Control Letters*, 37(3):117–122, Junho 1999.
- [LM99] Daniel Liberzon and A. Stephen Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems*, 19:59–70, Outubro 1999.
- [LR85] Gregório Luís and C. Silva Ribeiro. *Álgebra Linear*. MacGraw-Hill, 1985.
- [LT85] Peter Lancaster and Miron Tismenetsky. *The theory of matrices*. Academic Press, Inc., second edition, 1985.
- [MP89] A. P. Molchanov and Ye. S. Pyatnitskiy. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. *Systems Control Letters*, pages 59–64, 1989.
- [NB94] K. S. Narendra and J. Balakrishnan. A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting A-matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39:2469–2471, Dezembro 1994.
- [OF97] T. Ooba and Y. Funahashi. Two conditions concerning common quadratic Lyapunov function for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42:719–721, Maio 1997.
- [Rug93] Wilson J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice-Hall, Inc., 1993.
- [SN97] R. N. Shorten and K. S. Narendra. A sufficient condition for the existence of a common Lyapunov function for two second order linear systems. *Pro-*

- ceedings of the 36th Conference on Decision and Control*, pages 3521–3522, Dezembro 1997.
- [SN98] R. N. Shorten and K. S. Narendra. On the stability and existence of a common Lyapunov functions for stable linear switching systems. *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3723–3724, 1998.
- [Vid85] M. Vidyasagar. *Control system synthesis: a factorization approach*. MIT Press, 1985.